MATEMATİK I

ÇALIŞMA SORU HAVUZU

Metin Turgay

Selçuk Üniversitesi Matematik Bölümü

2026-2027 Güz Dönemi

© Dr. Metin Turgay

İçindekiler

1. Fonksiyonlar ve Grafikleri **2**
1.1 Fonksiyonlar . . . 2
1.3 Fonksiyonların dönüşümleri ve pratik grafik çizimleri . . . 3
1.4 Ek Sorular . . . 3
1.5 Trigonometrik Fonksiyonlar . . . 5
1.5.1 Trigonometrik Özdeşlikler . . . 5
1.5.2 Periyodiklik ve Trigonometrik Fonksiyonların Grafikleri . . . 5
1.5.3 Ters Trigonometrik Fonksiyonlar . . . 7
1.5.4 Ek Sorular . . . 8
1.6 Üstel, Logaritmik ve Hiperbolik Fonksiyonlar . . . 8
1.6.1 Üstel ve Logaritmik Fonksiyonlar . . . 8

2. Limit ve Süreklilik **10**
2.1 Limit . . . 10
2.2 Limitin Matematiksel Tanımı . . . 12
2.3 Trigonometrik Limitler . . . 13
2.4 Ek Sorular . . . 14
2.5 Süreklilik . . . 14

3. Türev **16**
3.1 Teğet . . . 16
3.2 Fonksiyon Olarak Türev . . . 16
3.3 Türev Alma Kuralları . . . 17
3.4 Ek Sorular . . . 18
3.5 Trigonometrik ve Ters Trigonometrik Fonksiyonların Türevi . . . 20
3.5.1 Trigonometrik Fonksiyonların Türevi . . . 20
3.5.2 Ters Trigonometrik Fonksiyonların Türevi . . . 21
3.6 Logaritma ve Üstel Fonksiyonların Türevi . . . 21
3.6.1 Logaritma Fonksiyonunun Türevi . . . 21
3.6.2 Üstel Fonksiyonun Türevi . . . 21
3.6.3 Logaritmik Türev Alma . . . 22
3.7 Hiperbolik Fonksiyonlar ve Terslerinin Türevi . . . 22
3.8 Kapalı Fonksiyonların Türevi . . . 22
3.9 Yüksek Mertebeden Türevler . . . 22

4. Türevin Uygulamaları **23**
4.1 Maksimum-Minimum . . . 23
4.2 Maksimum-Minimum Problemleri . . . 25
4.3 Türevle İlgili Teoremler . . . 26
4.4 Belirsiz Şekiller . . . 26
4.5 Ek Sorular . . . 27
4.6 Grafik Çizimi . . . 28
4.7 Ek Sorular . . . 29

© Dr. Metin Turgay

1. Fonksiyonlar ve Grafikleri

1.1 Fonksiyonlar

Soru 1.

20 kişilik bir öğrenci grubunu A kümesi ile, 25 adet sırayı da B kümesi ile temsil edelim. Her öğrenciyi farklı bir sıraya eşleştirdiğimiz kural A'dan B'ye bir fonksiyon mudur? Gerekçelendiriniz.

Soru 2.

$A = [0, \infty)$ ve $B = \mathbb{R}$ olsun. A'daki her elemana B'de onun karekökünü karşılık getiren kural reel değişkenli ve reel değerli bir fonksiyon mudur? Bu fonksiyonu bir formülle ifade ediniz.

Soru 3.

$f(x) = 2x - 1$ ve $g(x) = x^2$ fonksiyonlarının grafiklerini çiziniz. Tanım ve görüntü kümelerini bulunuz.

Soru 4.

$x = y^2 - 1$ denkleminin grafiği x'in bir fonksiyonu mudur? Gerekçelendiriniz.

Soru 5.

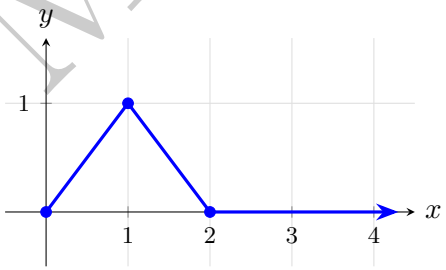
$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ x + 1, & x < 0 \end{cases}$$

parçalı tanımlı fonksiyonu veriliyor. $f(3)$ ve $f(-2)$ değerlerini bulunuz.

Soru 6.

Grafiği verilen fonksiyonun formülünü bulunuz.

(Not: Fonksiyonun tanım kümesi $[0, \infty)$'dur ve $x > 2$ için grafik x-ekseni üzerinde devam etmektedir.)



Soru 7.

$f(x) = \sqrt{x}$ ve $g(x) = x^2 - 1$ olsun. $f + g$, $f - g$, fg ve $\dfrac{f}{g}$ fonksiyonları ile bunların tanım kümelerini bulunuz.

Soru 8.

$f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ ile $g(x) = x + 1$ fonksiyonlarının birebir ve örten olup olmadığını araştırınız.

Soru 9.

$f(x) = x^2 + 1$ ve $g(x) = \sqrt{x}$ fonksiyonları için $g \circ f$ ile $f \circ g$ bileşke fonksiyonlarını ve tanım kümelerini bulunuz.

© Dr. Metin Turgay

Soru 10.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + 1$ fonksiyonunun varsa tersini bulup grafiğini çiziniz.

Soru 11.

$f(x) = x^2$ fonksiyonunun hangi aralıkta artan, hangi aralıkta azalan olduğunu belirleyiniz ve artan/azalan fonksiyon tanımını kullanarak gösteriniz.

Soru 12.

$f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = x^3 + x$ ve $h(x) = 2x - x^2$ fonksiyonlarının tek ya da çift fonksiyon olup olmadığını araştırınız.

1.3 Fonksiyonların dönüşümleri ve pratik grafik çizimleri

Soru 13.

$y = \sqrt{x}$ fonksiyonunun grafiğinden yararlanarak $y = \sqrt{x} - 2$, $y = \sqrt{x-2}$, $y = -\sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$, $y = \sqrt{-x}$ fonksiyonlarının grafiklerini çiziniz.

Soru 14.

$y = x^2$ fonksiyonunun grafiğinden yararlanarak $y = x^2 + 6x + 10$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Soru 15.

$y = x^2$ fonksiyonunun grafiğinden yararlanarak $y = (x-4)^2$, $y = x^2 + 3$, $y = \dfrac{x^2}{3}$, $y = -(x+4)^2$ fonksiyonlarının grafiklerini çiziniz.

Soru 16.

$y = 1 + \sqrt{x}$, $y = \sqrt[3]{x+2}$, $y = \dfrac{1}{x-3}$, $y = 2 - \sqrt{x+1}$ fonksiyonlarının grafiklerini çiziniz.

Soru 17.

$f(x) = \left|x^2 - 3x - 4\right|$, $g(x) = x^2 - 4\,|x|$, $h(x) = \left|x^2 - 2\,|x|\right|$, $k(x) = \sqrt{|x|}$ fonksiyonlarının grafiklerini çiziniz.

1.4 Ek Sorular

Soru 18.

Aşağıdaki fonksiyonların tanım kümelerini bulunuz.

a) $f(x) = \sqrt{x-2} + \sqrt{4-x}$

b) $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{2-x}{x^2-9}}$

c) $f(x) = \dfrac{2-x}{x^2-9}$

d) $f(x) = \sqrt{\dfrac{2-x}{x^2-9}}$

e) $f(x) = \dfrac{x}{\|x\|}$

Soru 19.

-1 ve 2 sayılarının $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+4}$ rasyonel fonksiyonunun görüntü kümesinde olup olmadığını araştırınız.

Soru 20.

Aşağıdaki fonksiyonların tanım ve görüntü kümelerini bulunuz.

© Dr. Metin Turgay

a) $f(x) = \sqrt{x-2}$

b) $f(x) = x^2 - 4x + 5$

c) $f(x) = x^3 - 1$

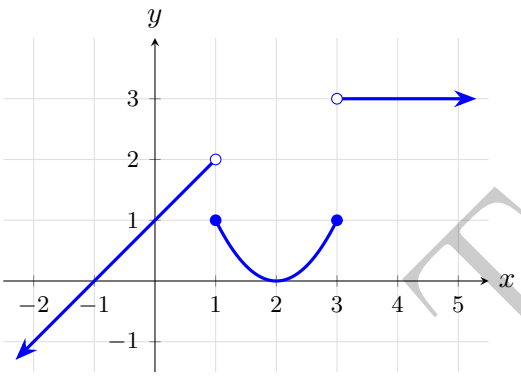
d) $f(x) = \sqrt{\dfrac{3-x}{x+1}}$

e) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 4}{x^2 - 3x + 2}$

Soru 21.

Grafiği verilen fonksiyonun kuralını bulunuz.

(Not: Dolu nokta grafiğe ait noktayı, boş nokta grafiğe ait olmayan noktayı gösterir; ortadaki parça bir paraboldür. Grafik sağda ve solda oklar yönünde aynı biçimde devam etmektedir.)



Soru 22.

$f(x) = \dfrac{x}{x-2}$ olsun. $(f \circ g)(x) = x$ olacak şekilde bir $y = g(x)$ fonksiyonu bulunuz.

Soru 23.

$f(x) = 2x^3 - 4$ olsun. $(f \circ g)(x) = x + 2$ olacak şekilde bir $y = g(x)$ fonksiyonu bulunuz.

Soru 24.

$f(x) = \sqrt{x - \|x\|}$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Soru 25.

$f(x) = 2\,|x-1| + 3\,|x+1|$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Soru 26.

Uçlardaki davranışı ve sıfır yerlerinin katlılığını kullanarak aşağıdaki fonksiyonların grafiklerini çiziniz.

a) $f(x) = x^3 - 9x$

b) $g(x) = (1-x)(x+1)^2$

c) $h(x) = -(x+4)(x-2)^3$

Soru 27.

Aşağıdaki fonksiyonların grafiklerini çiziniz.

a) $f(x) = x^2(x-2)^2$

b) $g(x) = x^4 - 4x^3 + 3x^2$

c) $h(x) = -x^3 + x^2 + 6x$

d) $k(x) = x^4 - 4x^2 + 5$

© Dr. Metin Turgay

1.5 Trigonometrik Fonksiyonlar

Soru 28.

Yarıçapı 6 birim olan bir çemberde bir merkez açıya karşılık gelen yayın uzunluğu 2π birim ise merkez açının ölçüsü kaç radyandır?

Soru 29.

$\cos\dfrac{2\pi}{3}$ ve $\sin\dfrac{2\pi}{3}$ ifadelerini hesaplayınız.

1.5.1 Trigonometrik Özdeşlikler

Soru 30.

$\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)$, $\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)$, $\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)$, $\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)$ ifadelerini toplam ve fark formüllerini kullanarak daha sade biçimde yazınız.

Soru 31.

Toplam formüllerini kullanarak $\sin\dfrac{7\pi}{12}$ değerini $\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{3}\right)$ şeklinde yazarak, $\cos\dfrac{11\pi}{12}$ değerini de $\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{2\pi}{3}\right)$ şeklinde yazarak hesaplayınız.

Soru 32.

$\cos\dfrac{\pi}{12}$ ve $\sin\dfrac{5\pi}{12}$ değerlerini hesaplayınız.

1.5.2 Periyodiklik ve Trigonometrik Fonksiyonların Grafikleri

Soru 33.

Tam değer fonksiyonu yardımıyla tanımlanan $f(x)=x-\|x\|$ ve $g(x)=\sqrt{x-\|x\|}$ fonksiyonlarının periyodik olduğunu gösteriniz ve esas periyotlarını bulunuz. Grafiklerini $[0,1]$ aralığında çizip öteleme yaparak tüm grafiklerini elde ediniz.

Soru 34.

Sabit bir fonksiyon periyodik midir? Esas periyodu var mıdır? Gerekçelendiriniz.

Soru 35.

$f(x)=\sin x$ ve $g(x)=\cos x$ fonksiyonlarının periyodik olduğunu gösteriniz ve esas periyotlarını bulunuz.

Soru 36.

$h(x)=\tan x$ ve $k(x)=\cot x$ fonksiyonlarının periyodik olduğunu gösteriniz ve esas periyotlarını bulunuz.

Soru 37.

Pratik grafik çizimleri kullanılarak aşağıdaki fonksiyonların grafiğini çiziniz.

a) $y=3\sin x$

b) $y=-\frac{1}{2}\cos x$

c) $y=|\sin x|$

d) $y=\sin 4x$

e) $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$

f) $y=1+\sin 2x$

© Dr. Metin Turgay

Soru 38.

Aşağıdaki fonksiyonların periyodik olup olmadığını araştırınız.

a) $y = |\sin x|$

b) $y = \sqrt{\sin x}$

Soru 39.

Aşağıdaki fonksiyonların tek veya çift olup olmadığını araştırınız.

a) $f(x) = x + \sin x$

b) $g(x) = \sin^2 x + \cos x$

c) $h(x) = \dfrac{\sin x}{2 + \cos x}$

Soru 40.

Aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu gösteriniz.

a) $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$

b) $\cos 4x = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1$

c) $\tan x = \dfrac{\sin 2x}{1 + \cos 2x}$

d) $\tan 2x = \dfrac{2}{\cot x - \tan x}$

Soru 41.

f fonksiyonunun tanım kümesi $[0, 1]$ ise $g(x) = f(\sin x)$ ve $h(x) = f(\tan x)$ fonksiyonlarının tanım kümesi nedir?

Soru 42.

f fonksiyonu p periyotlu bir fonksiyon olsun ($a \neq 0$). Bu durumda $\dfrac{p}{|a|}$ nın $f(ax+b)$ nin bir periyodu olduğunu gösteriniz. Bundan yararlanarak $y = \cos(3x - 5)$, $y = \sin(2x + 3)$, $y = \tan(-5x + 7)$ fonksiyonlarının periyodunu bulunuz.

Soru 43.

Aşağıda $\sin x$, $\cos x$ veya $\tan x$ ten biri veriliyor. x belirtilen aralıkta ise diğer ikisini bulunuz.

a) $\sin x = \frac{3}{5}$, $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

b) $\tan x = 2$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

c) $\cos x = -\frac{5}{13}$, $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

Soru 44.

$\dfrac{1 - \cos x}{\sin x} = \dfrac{\sin x}{1 + \cos x}$ eşitliğinin doğruluğunu gösteriniz.

Soru 45.

Aşağıdaki eşitsizliklerin doğruluğunu gösteriniz.

a) $-|\theta| \leq \sin\theta \leq |\theta|$

b) $-|\theta| \leq 1 - \cos\theta \leq |\theta|$

© Dr. Metin Turgay

1.5.3 Ters Trigonometrik Fonksiyonlar

Soru 46.
$\arcsin \frac{1}{2}$ ve $\sin^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ifadelerini hesaplayınız.

Soru 47.
$\cos(\arcsin x)$ ifadesini sadeleştiriniz.

Soru 48.
$\arccos 1$ ve $\cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ifadelerini hesaplayınız.

Soru 49.
$\arccos x + \arccos t = \arccos\left(xt - \sqrt{(1-x^2)(1-t^2)}\right)$ eşitliğinin doğruluğunu gösteriniz.

Soru 50.
$\arctan(-\sqrt{3})$ ve $\tan^{-1} 1$ ifadelerini hesaplayınız.

Soru 51.
$\sec^2(\arctan x)$ ifadesini sadeleştiriniz.

Soru 52.
$\tan(\cos^{-1} x) = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ ve $\sin(\arctan x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ eşitliklerinin doğruluğunu gösteriniz.

Soru 53.
$\operatorname{arccot} \sqrt{3}$ ve $\cot^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ ifadelerini hesaplayınız.

Soru 54.
$0 < x < 1$ için $\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \dfrac{\pi}{2}$ olduğunu gösteriniz.

Soru 55.
$f(x) = \arcsin x$ ve $g(x) = \arctan x$ fonksiyonlarının tek fonksiyon olduklarını gösteriniz.

Soru 56.
$\cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1} x$ olduğunu gösteriniz.

Soru 57.
$f(x) = \arctan(\sin x)$ fonksiyonu periyodik midir?

Soru 58.
Aşağıda verilen fonksiyonların tanım kümelerini bulunuz.

a) $f(x) = \arcsin \dfrac{x}{2}$

b) $g(x) = \arctan \dfrac{x-1}{x}$

c) $h(x) = \operatorname{arccot} \sqrt{x-1}$

© Dr. Metin Turgay

Soru 59.
$\arcsin \dfrac{2}{\sqrt{29}} + \arcsin \dfrac{5}{\sqrt{29}}$ ifadesinin değerini bulunuz.

Soru 60.
$\tan\left(\arcsin \frac{1}{4}\right)$ ifadesinin değerini hesaplayınız.

1.5.4 Ek Sorular

Soru 61.
$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$ eşitliğinin doğruluğunu gösteriniz.

Soru 62.
$\arcsin x + \arcsin \dfrac{x}{2} = \dfrac{\pi}{4}$ denklemini çözünüz.

Soru 63.
$\arcsin \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \arctan x$ olduğunu gösteriniz.

1.6 Üstel, Logaritmik ve Hiperbolik Fonksiyonlar

1.6.1 Üstel ve Logaritmik Fonksiyonlar

Soru 64.
$y = 3 - 2^x$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz, tanım ve görüntü kümesini bulunuz.

Soru 65.
$f(x) = 2^x$ fonksiyonu ile $g(x) = x^2$ fonksiyonlarının grafiklerini aynı koordinat sisteminde çizerek karşılaştırınız. x in büyük değerleri için hangi fonksiyon daha hızlı büyümektedir?

Soru 66.
$f(x) = e^x$ in grafiğinden yararlanarak $g(x) = \frac{1}{2}e^{-x} - 1$, $h(x) = 3 - e^x$ fonksiyonlarının grafiklerini çiziniz, tanım ve görüntü kümelerini bulunuz.

Soru 67.
$\log_2 80 - \log_2 5$ ifadesinin değerini bulunuz.

Soru 68.
$e^{5-3x} = 10$ denklemini çözünüz.

Soru 69.
$y = \ln x$ fonksiyonunun grafiğinden yararlanarak $y = \ln|x|$, $y = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$, $y = \ln(x-2) - 1$ fonksiyonlarının grafiklerini çiziniz.

Soru 70.
$\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$ eşitliğinin varlığını gösteriniz. Buradan $\log_a b = \dfrac{\ln b}{\ln a}$ eşitliği yazılabilir mi?

© Dr. Metin Turgay

Soru 71.

Aşağıda verilen fonksiyonların tanım kümelerini bulunuz.

a) $f(x) = \ln(x^2 - 9)$

b) $f(x) = \ln(x^2 - 2x)$

c) $f(x) = \ln\left(\sqrt{x-4} + \sqrt{6-x}\right)$

d) $f(x) = \arcsin(\ln x)$

e) $f(x) = \log\left(1 - \log(x^2 - 5x + 16)\right)$

f) $f(x) = \sqrt{\ln(x-2)}$

Soru 72.

$f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$ fonksiyonunun tek fonksiyon olduğunu gösteriniz.

Soru 73.

Aşağıdaki fonksiyonların tersi için bir formül bulunuz.

a) $y = \ln(x+3)$

b) $y = \dfrac{1+e^x}{1-e^x}$

Soru 74.

$f(x) = \ln(4 - x^2)$ fonksiyonunun tanım ve görüntü kümesini bulunuz.

Soru 75.

Aşağıdaki denklem ve eşitsizliklerin çözüm kümelerini bulunuz.

a) $\ln(\ln x) = 1$

b) $e^{2x+3} - 7 = 0$

c) $\ln x - \ln(x-1) = 1$

d) $\ln x > -1$

e) $e^{2-3x} > 4$

Soru 76.

$f(x) = \ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$ fonksiyonunun tanım kümesini bulunuz. x ve y tanım kümesine ait iken

$$f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right) = f(x) + f(y)$$

eşitliğinin sağlandığını gösteriniz.

© Dr. Metin Turgay

2. Limit ve Süreklilik

2.1 Limit

Soru 77.

$f(x) = c$ (c sabit bir reel sayı) şeklinde sabit bir fonksiyon veriliyor. f'nin herhangi bir a noktasındaki limiti nedir? Gerekçelendiriniz.

Soru 78.

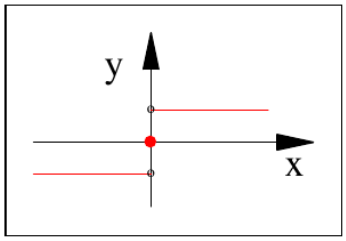
$f(x) = x$ birim (özdeşlik) fonksiyonu veriliyor. f'nin herhangi bir a noktasındaki limiti nedir? Gerekçelendiriniz.

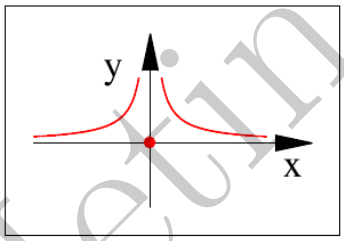
Soru 79.

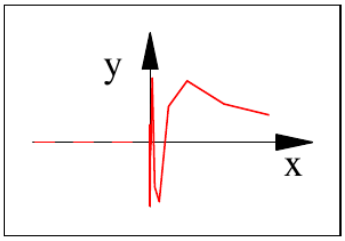
Grafikleri aşağıda verilen

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \qquad h(x) = \begin{cases} \sin\left(\dfrac{1}{x}\right), & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

fonksiyonlarının $x = 0$ noktasındaki sağdan limitlerini, soldan limitlerini ve limitlerini (varsa) bulunuz. Limitin var olmadığı durumlarda nedenini açıklayınız.

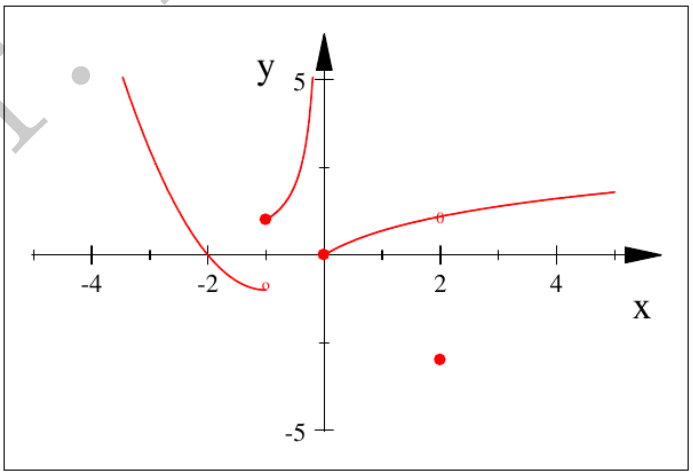






Soru 80.

Aşağıdaki şekilde grafiği verilen f fonksiyonuna göre istenen limit değerlerini (eğer varsa) bulunuz.



$$\lim_{x\to -1^+} f(x), \quad \lim_{x\to -1^-} f(x), \quad \lim_{x\to -1} f(x),$$
$$\lim_{x\to 0^+} f(x), \quad \lim_{x\to 0^-} f(x), \quad \lim_{x\to 0} f(x),$$
$$\lim_{x\to 2^+} f(x), \quad \lim_{x\to 2^-} f(x), \quad \lim_{x\to 2} f(x).$$

© Dr. Metin Turgay

Soru 81.

Limit alma kuralları ile Örnek 88 ve Örnek 89 (sabit fonksiyonun ve birim fonksiyonun limiti) kullanılarak aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

a) $\lim_{x\to 5}(2x^2-3x+4)$

b) $\lim_{x\to -2}\dfrac{x^3+2x^2-1}{5-3x}$

c) $\lim_{x\to -2}\sqrt{4x^2-3}$

Soru 82.

Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

a) $\lim_{x\to 1}(x^3+2x-1)$

b) $\lim_{x\to 0}\dfrac{4x^5-1}{x^2+2}$

Soru 83.

(Sıfır paydaların cebirsel olarak yok edilmesi) Aşağıdaki limitleri hesaplayınız. (Buradaki limitlerde paydanın limiti sıfır olduğundan bölüm kuralını doğrudan uygulayamayız.)

a) $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{x^2-x}$

b) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2}$

Soru 84.

Aşağıdaki limitleri (varsa) hesaplayınız. ($\|x\|$: tam değer fonksiyonu.)

a) $\lim_{x\to 0}|x|$

b) $\lim_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x}$

c) $\lim_{x\to 3}\|x\|$

d) $\lim_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}$

e) $\lim_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x}$

f) $\lim_{x\to 0}\dfrac{1}{x}$

g) $\lim_{x\to 3}\dfrac{\|x\|}{x}$

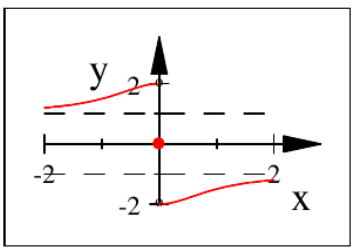
h) $\lim_{x\to 4}\dfrac{2-x}{(x-4)(x+2)}$

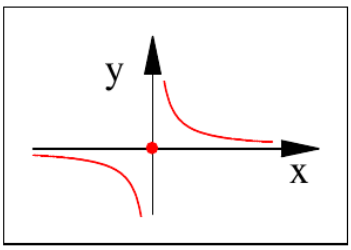
Soru 85.

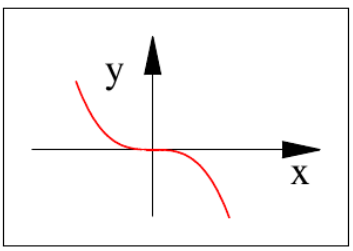
$f(x)=\|x\|$ fonksiyonunun hangi noktalarda limiti mevcuttur?

Soru 86.

Aşağıdaki grafikleri inceleyerek her bir fonksiyonun $x\to\infty$ ve $x\to-\infty$ için limitlerini tahmin ediniz.







© Dr. Metin Turgay

Soru 87.

Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

a) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{3x^2-4x+5}{2x^2+3x-1}$

b) $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{2x+5}{x^2+x+1}$

c) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^3-x+3}{x^2+1}$

d) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x}{\|x\|}$

e) $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+x}-x\right)$

Soru 88.

Sıkıştırma Teoremini kullanarak aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

a) $\lim_{x\to0} \dfrac{x^2}{(1+x^4)^{5/2}}$

b) $\lim_{x\to0} \dfrac{x^2}{1+|x|^{1/2}}$

c) $\lim_{x\to0} x^2 \sin\dfrac{1}{x}$

2.2 Limitin Matematiksel Tanımı

Soru 89.

$f(x)=2x-1$ fonksiyonu ile $a=4$ noktasını göz önüne alalım. Sezgisel olarak x değeri 4'e yaklaşırken $f(x)$'in 7'ye yaklaştığı, yani $\lim_{x\to4}(2x-1)=7$ olduğu anlaşılmaktadır. x değeri 4'e ne kadar yakın olmalıdır ki $f(x)$ değeri 7'ye 2 birimden daha az yakın olsun? Diğer bir deyişle x'in hangi değerleri için $|f(x)-7|<2$ olur?

Soru 90.

$\lim_{x\to4}\sqrt{x}=2$ limiti için $\varepsilon=1$ olduğunda işe yarayacak bir $\delta>0$ sayısı bulunuz; yani $0<|x-4|<\delta$ eşitsizliğini sağlayan her x için $|\sqrt{x}-2|<1$ olacak şekilde bir $\delta>0$ bulunuz. δ'nın alabileceği en büyük değer nedir?

Soru 91.

Limitin ε-δ tanımını kullanarak $\lim_{x\to2}(3x+1)=7$ olduğunu gösteriniz.

Soru 92.

Limitin ε-δ tanımını kullanarak $\lim_{x\to1}(x^2-3x)=-2$ olduğunu gösteriniz.

Soru 93.

$f(x)=2x+1$ fonksiyonunun $a=2$ noktasındaki limitinin 9 olmadığını limitin tanımını kullanarak (örneğin $\varepsilon=1$ alarak) gösteriniz.

Soru 94.

Limitin tanımını kullanarak $\lim_{x\to\infty}\dfrac{x}{x+2}=1$ olduğunu gösteriniz.

© Dr. Metin Turgay

Soru 95.

Limitin tanımını kullanarak $\lim_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2} = \infty$ olduğunu gösteriniz.

2.3 Trigonometrik Limitler

Soru 96.

$\lim_{x\to 0} \sin x = 0$ ve $\lim_{x\to 0} \cos x = 1$ olduğunu gösteriniz. Bunlardan yararlanarak $\lim_{x\to a} \sin x = \sin a$ ve $\lim_{x\to a} \cos x = \cos a$ olduğunu gösteriniz.

Soru 97.

Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x}$

b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{x}$

c) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin ax}{\sin bx} \quad (b \neq 0)$

d) $\lim_{x\to \infty} x \sin\left(\dfrac{\pi}{x}\right)$

e) $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos ax}{x^2}$

f) $\lim_{x\to 0} x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$

g) $\lim_{x\to 1} \dfrac{\sin(x-1)}{x^2+2x-3}$

h) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\arcsin x}{x}$

Soru 98.

Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

a) $\lim_{x\to \infty} \left(2^x + \dfrac{2}{x}\right)$

b) $\lim_{x\to \infty} \left(\dfrac{1}{3^x} + \ln \dfrac{1}{x}\right)$

c) $\lim_{x\to 0} \ln(1-x)$

d) $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{1}{1+2^{1/x}}$

e) $\lim_{x\to 0^-} \dfrac{1}{1+2^{1/x}}$

Soru 99.

Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

a) $\lim_{x\to 0} (1+2x)^{\frac{3}{x}+4}$

b) $\lim_{x\to \infty} \left(\dfrac{x^2+2x+3}{x^2+4}\right)^{2x+3}$

© Dr. Metin Turgay

2.4 Ek Sorular

Soru 100.

$f(x) = |x|$ olmak üzere $\lim_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ limitini a'nın durumlarına göre irdeleyiniz.

Soru 101.

$y = f(x)$ eğrisinin $x = a$ apsisli noktasındaki teğetinin eğimi (limitin mevcut olması halinde)

$$m = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

eşitliği ile verilen m sayısıdır. Buna göre aşağıda verilen fonksiyonların belirtilen noktalardaki (eğer varsa) teğet denklemini bulunuz.

a) $f(x) = x^2 - 6x,\ \ a = -1$

b) $f(x) = 3x^3 - 1,\ \ a = 0$

c) $f(x) = \sqrt{x},\ \ a = \frac{1}{4}$

d) $f(x) = x^{2/3},\ \ a = 0$

2.5 Süreklilik

Soru 102.

$$f(x) = \begin{cases} 7x - 2, & x \le 0 \\ kx^2, & x > 0 \end{cases}$$

fonksiyonunu 0'da sürekli yapan bir k reel sayısı var mıdır?

Soru 103.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x \le 1 \\ k(x-1), & x > 1 \end{cases}$$

fonksiyonunu 1'de sürekli yapan bir k reel sayısı var mıdır?

Soru 104.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ k, & x = 0 \end{cases}$$

fonksiyonunu 0'da sürekli yapan bir k reel sayısı var mıdır?

Soru 105.

Polinom fonksiyonları hangi noktalarda süreklidir? Gerekçelendiriniz.

Soru 106.

Rasyonel fonksiyonlar hangi noktalarda süreklidir? Gerekçelendiriniz.

Soru 107.

$f(x) = \sin x$ ve $g(x) = \cos x$ fonksiyonları hangi noktalarda süreklidir? Gerekçelendiriniz.

© Dr. Metin Turgay

Soru 108.

$a > 0$, $a \neq 1$ olmak üzere $f(x) = a^x$ üstel fonksiyonu ve $g(x) = \log_a x$ logaritma fonksiyonu hangi kümeler üzerinde süreklidir? Gerekçelendiriniz.

Soru 109.

Kendileri sürekli olmadıkları hâlde çarpımları sürekli olan iki fonksiyon bulunuz.

Soru 110.

$f(x) = \sin(x^2)$ fonksiyonu hangi noktalarda süreklidir? Gerekçelendiriniz.

Soru 111.

$$f(x) = \frac{1}{x}, \qquad g(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x > 0 \\ -x^2, & x \leq 0 \end{cases} \qquad \text{ve} \qquad h(x) = \frac{\sin x}{x}$$

fonksiyonlarının 0 noktasındaki süreksizlik durumlarını (süreksizliğin çeşidini) inceleyiniz.

Soru 112.

$$f(x) = x - \|x\|, \qquad g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \qquad \text{ve} \qquad h(x) = |x + 2|$$

fonksiyonlarının tanım kümeleri üzerinde sürekli olup olmadığını araştırınız.

Soru 113.

$$g(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x > 0 \\ -x^2, & x \leq 0 \end{cases}$$

fonksiyonunun 0 noktasında soldan ve sağdan sürekli olup olmadığını inceleyiniz.

Soru 114.

$f(x) = \|x\|$ fonksiyonunun her n tam sayısında sağdan ve soldan sürekli olup olmadığını inceleyiniz.

Soru 115.

$f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ fonksiyonu $[-3, 3]$ aralığında sürekli midir? Gerekçelendiriniz.

Soru 116.

$x^3 - x - 1 = 0$ denkleminin $(1, 2)$ aralığında en az bir çözümünün olup olmadığını araştırınız.

Soru 117.

Tek dereceli tüm polinomların $\mathbb{R}$'de en az bir kökünün var olduğunu gösteriniz.

Soru 118.

$f : [0, 1] \to [0, 1]$ sürekli bir fonksiyon olsun. $f(a) = a$ olacak şekilde bir $a \in [0, 1]$ sayısının var olduğunu gösteriniz.

Soru 119.

$f(x) = x^3 - x^2 + x$ olsun. $f(c) = 10$ olacak şekilde bir c sayısının var olduğunu gösteriniz.

© Dr. Metin Turgay

Soru 120.
$\sqrt{2x+5} = 4 - x^2$ denkleminin bir kökünün var olduğunu gösteriniz.

Soru 121.
$f(x) = \sin x$ fonksiyonunun $\mathbb{R}$ üzerindeki mutlak maksimum ve mutlak minimum değerlerini bulunuz.

Soru 122.
$f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ fonksiyonunun aşağıdaki aralıklar üzerinde (varsa) mutlak maksimum ve mutlak minimum değerlerini bulunuz.

a) $[1, 2]$

b) $(0, 2)$

c) $(0, 2]$

Soru 123.
$f(x) = x^2 - 4x$ fonksiyonunun $[-1, 6]$ aralığı üzerinde mutlak maksimum ve minimum değerleri var mıdır? Varsa bu değerleri bulunuz. $f([-1, 6])$ nedir?

3. Türev

3.1 Teğet

Soru 124.
$y = x^2$ parabolünün $(2, 4)$ noktasındaki teğetinin denklemini bulunuz.

Soru 125.
$y = \dfrac{1}{x}$ eğrisinin $a = 2$ apsisli noktasındaki teğetinin denklemini bulunuz.

Soru 126.
$f(x) = x^3 + 1$ fonksiyonunun a noktasındaki türevini türev tanımını kullanarak hesaplayınız.

Soru 127.
$y = f(x)$ eğrisinin $(4, 3)$ noktasındaki teğet doğrusu $(0, 2)$ noktasından geçtiğine göre $f(4)$ ve $f'(4)$ nedir?

Soru 128.
$f(0) = 0$, $f'(0) = 3$, $f'(1) = 0$ ve $f'(2) = -1$ şartlarını sağlayan bir f fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Soru 129.
$y = \sqrt{x}$ eğrisine teğet ve eğimi $\dfrac{1}{4}$ olan doğrunun denklemini bulunuz.

3.2 Fonksiyon Olarak Türev

Soru 130.
$f(x) = \sqrt{x}$ ise f' fonksiyonunu ve tanım kümesini bulunuz.

© Dr. Metin Turgay

Soru 131.

$f(x) = |x|$ fonksiyonunun $(-\infty, 0)$ ve $(0, \infty)$ aralıklarında türevlenebilir olduğunu, fakat $x = 0$ noktasında türevlenemediğini gösteriniz.

3.3 Türev Alma Kuralları

Soru 132.

$f(x) = x^3 + \frac{1}{5}x^2 + 7x + 5$ polinomunun türevini hesaplayınız.

Soru 133.

$f(x) = x^4 - 2x^2 + 2$ eğrisi üzerinde teğet doğrusunun yatay olduğu nokta var mıdır? Varsa bu noktaları bulunuz.

Soru 134.

$f(x) = (4x^2 - 1)(7x^3 + x)$ ise $f'(x)$'i bulunuz.

Soru 135.

$g(4) = 2$ ve $g'(4) = 3$ olmak üzere $f(x) = \sqrt{x}\, g(x)$ ise $f'(4)$ değerini bulunuz.

Soru 136.

$f(x) = \dfrac{5x^4 + x^2}{x^3 + 2}$ ise $f'(x)$'i bulunuz.

Soru 137.

n herhangi bir negatif tam sayı iken $f(x) = x^n$ kuvvet fonksiyonunun türevinin $f'(x) = nx^{n-1}$ olduğunu gösteriniz.

Soru 138.

n bir pozitif tam sayı olmak üzere $f(x) = x^{1/n}$ fonksiyonu için $f'(x)$'i ters fonksiyonun türevi kuralını kullanarak hesaplayınız.

Soru 139.

$f(x) = x^{1/3}$ ise $f'(x)$'i bulunuz.

Soru 140.

$F(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ fonksiyonunun türevini zincir kuralı yardımıyla hesaplayınız.

Soru 141.

$f(x) = (x^3 + 1)^{100}$ fonksiyonunun türevini bulunuz.

Soru 142.

$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2 + x + 1}}$ fonksiyonunun türevini bulunuz.

Soru 143.

$f(x) = (2x + 1)^5(x^3 - x + 1)^4$ fonksiyonunun türevini bulunuz.

Soru 144.

$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x$ yaklaşımını kullanarak $\sqrt[3]{28}$ sayısının yaklaşık değerini bulunuz.

© Dr. Metin Turgay

3.4 Ek Sorular

Soru 145.

Aşağıdaki fonksiyonların, eğer varsa, karşılarında yazılı noktalardaki türevlerini hesaplayınız. Fonksiyonlar bu noktalarda sürekli midirler? (Burada $\|x\|$ tam değer fonksiyonunu göstermektedir.)

a) $f(x) = |x-1|,\ a = 1$

b) $f(x) = \|x\|,\ a = 2$

c) $f(x) = x\,|x|,\ a = 0$

d) $f(x) = x\,\|x\|,\ a = 0$

e) $f(x) = \begin{cases} \|x\|, & x > 0 \\ x^2, & x \le 0 \end{cases},\ a = 0$

f) $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases},\ a = 0$

g) $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases},\ a = 0$

Soru 146.

Aşağıdaki fonksiyonların karşılarında yazılı noktalardaki türevlerini hesaplayınız.

a) $f(x) = (x^2+1)^3,\ x = 1$

b) $f(x) = (1+x^{-2})^{50},\ x = 1$

c) $f(x) = \left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^{10},\ x = 0$

d) $f(x) = x\sqrt{1+x^2},\ x = 0$

e) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}},\ x = \frac{1}{2}$

f) $f(x) = \sqrt{x+\sqrt{x}},\ x = 1$

g) $f(x) = \sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}},\ x = 0$

Soru 147.

$f(x) = x^3 + 4x$ fonksiyonu için $(f^{-1})'(5)$ değerini bulunuz.

Soru 148.

$f(0) = 1,\ \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-1}{x} = 2$ ve $g(x) = (x^2+3)^4 f(x)$ olsun. $g'(0)$ değerini bulunuz.

Soru 149.

$g(0) = g'(0) = 0$ ve

$$f(x) = \begin{cases} g(x)\cos\dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

olsun. $f'(0)$ değerini bulunuz.

Soru 150.

$y = x^3 - x^2 - x + 1$ eğrisi üzerinde teğetin yatay olduğu noktaları bulunuz.

Soru 151.

Hangi x değerleri için $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 6x + 87$ fonksiyonunun grafiğinin yatay teğeti vardır?

© Dr. Metin Turgay

Soru 152.

$y = 6x^3 + 5x - 3$ eğrisinin eğimi 4 olan bir teğet doğrusu olmadığını gösteriniz.

Soru 153.

$y = x^2 + 1$ eğrisinin hangi noktasındaki teğeti orijinden geçer?

Soru 154.

$y = x^2$ parabolünün $(0, -4)$ noktasından geçen iki teğet doğrusu olduğunu şekil çizerek gösteriniz. Bu iki teğet doğrusunun parabol ile kesiştiği noktaların koordinatlarını bulunuz.

Soru 155.

$(2, -3)$ noktasından geçen ve $y = x^2 + x$ parabolüne teğet olan doğruların denklemlerini bulunuz.

Soru 156.

Bir C eğrisinin P noktasındaki normal doğrusu, P'den geçen ve C'nin P noktasındaki teğetine dik olan doğru olarak tanımlanır. Buna göre $y = 1 - x^2$ eğrisinin $(2, -3)$ noktasındaki normal doğrusunu bulunuz.

Soru 157.

$y = x - x^2$ parabolünün $(1, 0)$ noktasındaki normal doğrusu, parabol ile ikinci kez nerede kesişir?

Soru 158.

Hangi a ve b değerleri için $2x + y = b$ doğrusu $y = ax^2$ parabolüne $x = 2$ apsisli noktada teğettir?

Soru 159.

Grafiğinin $(-2, 6)$ ve $(2, 0)$ noktalarındaki teğetleri yatay olan ve $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ biçiminde verilen polinomu bulunuz.

Soru 160.

y-ekseni üzerinde kesişen iki doğrunun $y = x^2$ parabolüne teğet olduğu bir şekil çiziniz. Bu doğrular hangi noktada kesişir?

Soru 161.

$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x$ yaklaşımını kullanarak $\sqrt{5}$ ve $\sqrt[4]{17}$ sayılarının yaklaşık değerlerini hesaplayınız.

Soru 162.

$\dfrac{d}{dx} f(2x) = x^2$ ise $f'(x)$ nedir?

Soru 163.

$y = x\sqrt{1 - x^2}$, $-1 \leq x \leq 1$ eğrisinin hangi noktalardaki teğeti ya yatay ya da dikeydir?

Soru 164.

$f(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$ eğrisinin $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$ noktasındaki teğetini bulunuz. Eğri ile teğeti aynı düzlemde çiziniz.

Soru 165.

$h(2) = 4$, $h'(2) = -3$ ise $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{h(x)}{x}\right)\Big|_{x=2}$ değerini bulunuz.

© Dr. Metin Turgay

Soru 166.
$f(x) = \dfrac{x}{x+1}$ eğrisine teğet olan doğrulardan kaç tanesi $(1,2)$ noktasından geçer? Bu doğrular eğriye hangi noktalarda teğettir?

Soru 167.
$y = \dfrac{x-1}{x+1}$ eğrisinin $x - 2y = 2$ doğrusuna paralel olan teğet doğrularının denklemlerini bulunuz.

Soru 168.
$y = x^2 + ax + b$ ve $y = cx - x^2$ eğrileri $(1,0)$ noktasında ortak teğet doğrusuna sahiptir. a, b ve c sayılarını bulunuz.

Soru 169.

$$f(x) = \begin{cases} ax + b, & x > -1 \\ bx^2 - 3, & x \leq -1 \end{cases}$$

fonksiyonunun her yerde türevlenebilir olması için a ve b ne olmalıdır?

3.5 Trigonometrik ve Ters Trigonometrik Fonksiyonların Türevi

3.5.1 Trigonometrik Fonksiyonların Türevi

Soru 170.
Aşağıdaki fonksiyonların türevlerini hesaplayınız.

a) $f(x) = x^2 \tan x$

b) $f(x) = \dfrac{\sin x}{1 + \cos x}$

c) $f(x) = \dfrac{\tan x}{x}$

d) $f(x) = \dfrac{x}{\sin x + \cos x}$

e) $f(x) = \dfrac{\tan x - 1}{\sec x}$

f) $f(x) = \dfrac{x \cos x - \sin x}{x \sin x + \cos x}$

Soru 171.
$y = x \cos x$ eğrisinin $(\pi, -\pi)$ noktasındaki teğetinin denklemini bulunuz.

Soru 172.
$y = \sin(\sin x)$ eğrisinin $(\pi, 0)$ noktasındaki teğetinin denklemini bulunuz.

Soru 173.
$y = \sec x - 2\cos x$ eğrisinin $\left(\frac{\pi}{3}, 1\right)$ noktasındaki teğetinin denklemini bulunuz.

Soru 174.
Hangi x değerleri için $f(x) = x + 2\sin x$ eğrisinin yatay teğeti vardır?

Soru 175.
$y = \dfrac{\cos x}{2 + \sin x}$ eğrisi üzerinde teğetin yatay olduğu noktaları bulunuz.

Soru 176.
Zincir kuralı yardımıyla aşağıdaki fonksiyonların türevini hesaplayınız.

© Dr. Metin Turgay

a) $f(x) = \sin 3x^2$

b) $f(x) = \tan^3 x + \cos(x^2+1)$

c) $f(x) = (\tan\sqrt{x})^5$

d) $f(x) = \cos(\sin x)$

e) $f(x) = \tan(\sin x)$

f) $f(x) = \sin(\sin(\sin x))$

g) $f(x) = \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$

h) $f(x) = \frac{1}{3}\tan^3 x - \tan x + x$

i) $f(x) = (2-3\cos x)^{3/2}$

j) $f(x) = \sin^2\left[(2x-1)^{3/2}\right]$

Soru 177.

$\cos 62^\circ$ değerini yaklaşık olarak hesaplayınız. ($62^\circ = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{90}$ olup $\Delta x = \frac{\pi}{90}$ alınız.)

Soru 178.

$\cos 43^\circ$ ve $\sin 32^\circ$ değerlerini yaklaşık olarak hesaplayınız.

3.5.2 Ters Trigonometrik Fonksiyonların Türevi

Soru 179.

Zincir kuralını da dikkate alarak aşağıdaki fonksiyonların türevini hesaplayınız.

a) $f(x) = \arcsin\sqrt{1-x^2}$

b) $f(x) = x\arctan\sqrt{x}$

c) $f(x) = \tan^{-1}\left(x - \sqrt{1+x^2}\right)$

d) $f(x) = \sqrt{1-x^2}\arcsin x$

e) $f(x) = (1+x^2)\arctan x$

f) $f(x) = \arcsin(\tan x)$

Soru 180.

$f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)\arcsin\sqrt{x} + \frac{1}{2}\sqrt{x-x^2}$ fonksiyonu için $f'(1)$ değerini bulunuz.

3.6 Logaritma ve Üstel Fonksiyonların Türevi

3.6.1 Logaritma Fonksiyonunun Türevi

Soru 181.

Zincir kuralını da dikkate alarak aşağıdaki fonksiyonların türevini hesaplayınız.

a) $f(x) = \ln(x^3+1)$

b) $f(x) = \ln\sqrt{x^2+1}$

c) $f(x) = x\ln(\sin x)$

d) $f(x) = \ln\sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}$

e) $f(x) = \ln|x|$

3.6.2 Üstel Fonksiyonun Türevi

Soru 182.

Zincir kuralını da dikkate alarak aşağıdaki fonksiyonların türevini hesaplayınız.

a) $f(x) = 2^{\cos 5x}$

b) $f(x) = \ln(e^{-x} + xe^{-x})$

c) $f(x) = e^{3x}\ln x - x$

d) $f(x) = e^{\arctan x}$

© Dr. Metin Turgay

3.6.3 Logaritmik Türev Alma

Soru 183.

Aşağıdaki fonksiyonların türevini hesaplayınız.

a) $f(x) = (1+x^2)^x$

b) $f(x) = x^{\sin x}$

c) $f(x) = (\ln x)^{\ln x}$

d) $f(x) = x^{\ln x}$

3.7 Hiperbolik Fonksiyonlar ve Terslerinin Türevi

Soru 184.

Aşağıdaki fonksiyonların türevini hesaplayınız.

a) $f(x) = \cosh(\ln x)$

b) $f(x) = \ln(\tanh 3x)$

3.8 Kapalı Fonksiyonların Türevi

Soru 185.

$5y^2 + \sin y = x^2$ eşitliğinden $\dfrac{dy}{dx}$ ifadesini hesaplayınız.

Soru 186.

$7y^4 + x^3y + x = 4$ eğrisinin grafiğine $(4, 0)$ noktasında teğet olan doğrunun denklemini bulunuz.

Soru 187.

Aşağıdaki bağıntılardan y' türevini hesaplayınız.

a) $x^2 + y^2 = 4$

b) $x^{2/3} + y^{2/3} = 8$

c) $x = y + \tan y$

d) $e^y - \ln(xy) = 1$

Soru 188.

$y^2 = x^3(2-x)$ eğrisine $(1, 1)$ noktasında teğet olan doğrunun denklemini bulunuz.

Soru 189.

$x^{2/3} + y^{2/3} = 4$ eğrisine $(-3\sqrt{3}, 1)$ noktasında teğet olan doğrunun denklemini bulunuz.

3.9 Yüksek Mertebeden Türevler

Soru 190.

$f(x) = 3x^4 - 2x^3 + x^2 - 4x + 2$ fonksiyonu için $f^{(5)}(x)$ nedir?

Soru 191.

$f(x) = \dfrac{1}{x}$ için $f^{(n)}(x)$ ve $f^{(n)}(1)$ nedir?

Soru 192.

$f(x) = \sin x$ için $f^{(n)}(x)$ nedir?

© Dr. Metin Turgay

Soru 193.

$f(x) = \cos 3x$ için $f^{(n)}(x)$ nedir?

Soru 194.

$f(x) = \sin^2 x$ için $f^{(n)}(x)$ nedir?

Soru 195.

Aşağıdaki fonksiyonlar için $f''(0)$ var mıdır? Varsa bu türevi hesaplayınız.

a) $f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

Soru 196.

$x^3 + y^3 + 3xy + 3y^2 + 6x + 6y = 0$ ile tanımlı $y = f(x)$ fonksiyonu için $y''(1)$ nedir?

Soru 197.

$f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, fonksiyonu için

$$f(1) + \frac{f'(1)}{1!} + \frac{f''(1)}{2!} + \cdots + \frac{f^{(n)}(1)}{n!} = 2^n$$

eşitliğinin doğruluğunu gösteriniz.

4. Türevin Uygulamaları

4.1 Maksimum-Minimum

Soru 198.

$f(x) = x^2 - 4x + 3$ fonksiyonunun artan ve azalan olduğu aralıkları bulunuz.

Soru 199.

$f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ fonksiyonu hangi aralıkta artan, hangi aralıkta azalandır?

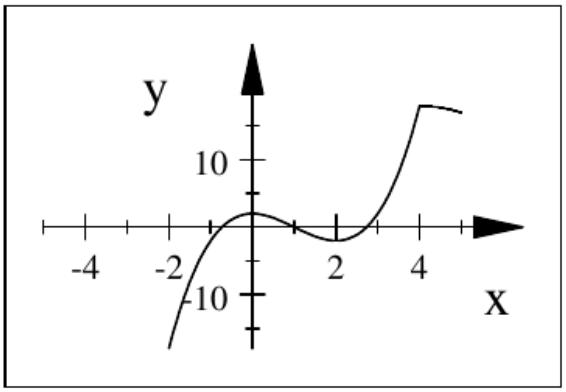
Soru 200.

$f(x) = x^3 + 3x$ fonksiyonunun artan ve azalan olduğu aralıkları bulunuz.

© Dr. Metin Turgay

Soru 201.

Grafiği aşağıda verilen $f : [-2, 5] \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun yerel maksimum, yerel minimum, mutlak maksimum ve mutlak minimum noktalarını belirleyiniz.



Soru 202.

$f(x) = 3 - (x-1)^2$ ile verilen fonksiyon için $x_0 = 1$ noktası bir yerel ekstremum noktası mıdır? Öyleyse türünü belirleyiniz ve $f'(1)$ değerini hesaplayınız.

Soru 203.

$f(x) = |x-1| - 1$ ile verilen fonksiyon için $x_0 = 1$ noktası bir yerel ekstremum noktası mıdır? Öyleyse türünü belirleyiniz. f bu noktada türevlenebilir mi?

Soru 204.

$f(x) = x^{2/3} + 1$ fonksiyonu için $x_0 = 0$ noktası bir yerel ekstremum noktası mıdır? Öyleyse türünü belirleyiniz. f bu noktada türevlenebilir mi?

Soru 205.

$f(x) = x^3$ ve

$$g(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -x^2 - 1, & x < 0 \end{cases}$$

fonksiyonları için $x_0 = 0$ noktasının kritik nokta olup olmadığını ve bir yerel ekstremum noktası olup olmadığını inceleyiniz.

Soru 206.

$f(x) = 3x^5 - 20x^3$ fonksiyonunun kritik noktalarını bulunuz. Bunlardan hangileri yerel ekstremum noktasıdır?

Soru 207.

$f(x) = x \sin x + \cos x$ fonksiyonunun $[0, 2\pi]$ aralığındaki yerel ekstremum noktalarını bulunuz.

Soru 208.

$f(x) = x^3 - 3x^2 - 1$ fonksiyonunun yerel ekstremum noktalarını bulunuz.

Soru 209.

$f(x) = 3x^{5/3} - 15x^{2/3}$ fonksiyonunun yerel ekstremum noktalarını bulunuz. Fonksiyonun $x = 0$ noktasında türevlenebilir olup olmadığını da inceleyiniz.

© Dr. Metin Turgay

Soru 210.

$f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ fonksiyonunun yerel ekstremum noktalarını bulunuz.

Soru 211.

$f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x$ biçiminde tanımlı fonksiyonun $[-1, 5]$ aralığındaki mutlak ekstremum değerlerini bulunuz.

Soru 212.

$f(x) = 6x^{4/3} - 3x^{1/3}$ biçiminde tanımlı fonksiyonun $[-1, 1]$ aralığındaki mutlak ekstremum değerlerini bulunuz.

Soru 213.

$f(x) = 3x^4 + 4x^3$ biçiminde tanımlı fonksiyonun $\mathbb{R}$'de mutlak ekstremumu var mıdır?

Soru 214.

$f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ fonksiyonunun $(0, \infty)$ üzerindeki mutlak ekstremum değerlerini (varsa) bulunuz.

Soru 215.

$f(x) = x \ln x - x$ fonksiyonunun $(0, \infty)$ üzerindeki mutlak ekstremum değerlerini (varsa) bulunuz.

4.2 Maksimum-Minimum Problemleri

Soru 216.

$P\left(\frac{5}{2}, 0\right)$ noktasının $y = \sqrt{x}$ eğrisine olan uzaklığını bulunuz.

Soru 217.

Toplamları 40 olan iki pozitif tam sayının kareleri toplamı en fazla kaç olur?

Soru 218.

16 cm eninde, 30 cm boyunda bir kartonun köşelerinden eşit kareler kesilip üstü açık bir kutu yapılıyor. Karelerin kenarı ne olmalıdır ki kutunun hacmi maksimum olsun?

Soru 219.

1 litre sıvının konulacağı silindirik şekilde kapalı bir kutu yapılmak isteniyor. En az malzemenin kullanıldığı kutunun boyutları ne olmalıdır?

Soru 220.

Taban yarıçapı 6 cm, yüksekliği 10 cm olan bir koninin içine yerleştirilebilen maksimum hacimli silindirin hacmi ne olur?

Soru 221.

Hipotenüsü $\sqrt{3}$ birim olan bir dik üçgen, dik kenarlarından biri etrafında döndürülüyor. Oluşan koninin hacmi en fazla ne olur?

Soru 222.

Yarıçapı 6 cm olan küre içine yerleştirilebilen bir dik koninin hacmi en fazla ne olur?

© Dr. Metin Turgay

Soru 223.

Taban yarıçapı 6 cm, yüksekliği 12 cm olan bir koninin içine bir başka koni ters ve tabanları paralel olacak şekilde yerleştiriliyor. Yerleştirilen koninin taban yarıçapı ve yüksekliği ne olmalıdır ki hacmi en fazla olsun?

Soru 224.

Yarıçapı 2 cm olan bir yarım çemberin içine bir dikdörtgen yerleştirilecektir. Bu dikdörtgenin alanı en fazla ne olur?

4.3 Türevle İlgili Teoremler

Soru 225.

Rolle teoreminden yararlanarak $5x^4 - 4x + 1 = 0$ denkleminin $(0, 1)$ aralığında en az bir köke sahip olduğunu gösteriniz.

Soru 226.

Simetrik bir kapalı aralık üzerinde sürekli ve iç kısımda türevlenebilir çift fonksiyonların en az bir yatay teğete sahip olduğunu gösteriniz.

Soru 227.

$f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1 - x^2}{1 + x^2}$ fonksiyonu Rolle teoreminin şartlarını sağlar mı? Sağlarsa teoremde adı geçen c sayısını bulunuz.

Soru 228.

$f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^4 \ln(1 + x^2)$ fonksiyonu Rolle teoreminin şartlarını sağlar mı? Sağlarsa teoremde adı geçen c sayısını bulunuz.

Soru 229.

$f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^{2/3} + 1$ fonksiyonu $[-1, 1]$'de süreklidir ve $f(-1) = f(1)$'dir. $(-1, 1)$'de $f'(c) = 0$ olacak şekilde bir c sayısı var mıdır? Bu sonuç Rolle teoremi ile çelişir mi? Neden?

Soru 230.

$f(x) = x^3 + 1$ fonksiyonu veriliyor. $[1, 2]$ aralığında f'nin Ortalama Değer Teoreminin şartlarını sağladığını gösteriniz ve teoremde adı geçen c sayısını bulunuz.

Soru 231.

f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli ve (a, b) aralığının her x noktası için $f'(x) = 0$ ise f'nin sabit fonksiyon olduğunu Ortalama Değer Teoremini kullanarak gösteriniz.

Soru 232.

f ve g fonksiyonları $[a, b]$ aralığında sürekli ve (a, b) aralığının her x noktası için $f'(x) = g'(x)$ olsun. Her $x \in [a, b]$ için $f(x)$ ile $g(x)$ arasındaki farkın sabit olduğunu gösteriniz.

4.4 Belirsiz Şekiller

Soru 233.

$f(x) = x^3 + x$ ve $g(x) = x^2$ fonksiyonlarına $[0, 1]$ aralığında Genelleştirilmiş Ortalama Değer Teoremi uygulanabilir mi? Uygulanabilir ise teoremde belirtilen c sayısını bulunuz.

© Dr. Metin Turgay

Soru 234.

L'Hospital Kuralını da dikkate alarak aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{2x^2+3x+1}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\sin x}{x^3}$

c) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\frac{\pi}{2}-\arctan x}{\frac{1}{x}}$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x-\tan x}{x^3}$

e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(1-\cos x)}{x^2}$

f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos^3 3x-\cos^3 2x}{x^2}$

Soru 235.

L'Hospital Kuralını da dikkate alarak aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

a) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(\sin x)}{\ln(\tan x)}$

b) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \dfrac{\sec x}{1+\tan x}$

c) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(1-\cos x)}{\ln x}$

Soru 236.

L'Hospital Kuralını da dikkate alarak aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

a) $\lim\limits_{x\to 0} (1-\cos x)\cot x$

b) $\lim\limits_{x\to \infty} x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$

c) $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x}\ln x$

Soru 237.

L'Hospital Kuralını da dikkate alarak aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

a) $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\cot x-\dfrac{1}{x}\right)$

b) $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{3x+1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\csc^2 x-x^{-2}\right)$

Soru 238.

L'Hospital Kuralını da dikkate alarak aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

a) $\lim\limits_{x\to 0^-} (1-e^x)^{\sin x}$

b) $\lim\limits_{x\to 0^+} (\cot x)^{\frac{1}{\ln x}}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} (1+3x)^{\frac{1}{x}}$

d) $\lim\limits_{x\to 0^+} (\sin x)^x$

e) $\lim\limits_{x\to 0^+} (\sin x)^{\tan x}$

4.5 Ek Sorular

Soru 239.

Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

a) $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{(x^2-1)\sqrt{\|x\|}}{\sin(x-1)}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1+\tan x}}{x^3}$

c) $\lim\limits_{x\to y} \dfrac{\sin^{-1} x-\sin^{-1} y}{x-y} \quad (|y|<1)$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 x-\sin x^2}{x^4}$

e) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{e^x+\ln x}{e^x+x}$

f) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} (\sin x)^{\sec x}$

g) $\lim\limits_{x\to 0^+} (\cot x-\csc x)$

© Dr. Metin Turgay

h) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}$

i) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$

j) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\arcsin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

4.6 Grafik Çizimi

Soru 240.

$f(x)=x^3+\frac{9}{2}x^2$ fonksiyonunun konveks ve konkav olduğu aralıkları bulunuz.

Soru 241.

$f(x)=3x^5-10x^3$ fonksiyonunun konveks ve konkav olduğu aralıkları bulunuz.

Soru 242.

$f(x)=x^3-3x^2-4x+12$ fonksiyonunun artan, azalan, konveks ve konkav olduğu aralıkları belirleyiniz. Varsa yerel ekstremum noktaları ile büküm noktalarını bulunuz.

Soru 243.

$f(x)=\dfrac{2x-1}{x}$ fonksiyonunu, $x\to\pm\infty$ için $g(x)\to 0$ olmak üzere $f(x)=\phi(x)+g(x)$ biçiminde yazarak grafiğinin yatay asimptotunu bulunuz. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)$ limitini hesaplayınız ve fonksiyonun grafiğini çiziniz.

Soru 244.

$f(x)=\dfrac{2x^2+3x-1}{x}$ fonksiyonunun eğik asimptotunu bulunuz ve grafiğini çiziniz.

Soru 245.

$f(x)=\dfrac{x^3+x+1}{x+1}$ fonksiyonunun eğrisel asimptotunu bulunuz ve grafiğini çiziniz.

Soru 246.

$f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ fonksiyonunun yatay asimptotunu bulunuz ve grafiğini çiziniz.

Soru 247.

$f(x)=\sqrt{x^2-x}$ eğrisinin eğik asimptotlarını bulunuz ve grafiğini çiziniz.

Soru 248.

$f(x)=\dfrac{x^2+5x-14}{x^3-4x}$ eğrisinin düşey asimptotlarını bulunuz. Paydanın her kökü bir düşey asimptot mudur? Gerekçelendiriniz.

Soru 249.

$f(x)=2^{\frac{1}{x}}$ eğrisinin düşey asimptotlarını bulunuz. $x=0$ doğrusundan başka bir doğrunun düşey asimptot olup olamayacağını tartışınız; $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$ ve $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)$ limitlerini hesaplayınız.

Soru 250.

$f(x)=x^4-8x^2$ fonksiyonunun grafiğini türev yardımıyla çiziniz.

© Dr. Metin Turgay

Soru 251.
$f(x) = \dfrac{x^2-4}{(x+1)^2}$ fonksiyonunun grafiğini türev yardımıyla çiziniz.

Soru 252.
$f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ fonksiyonunun grafiğini türev yardımıyla çiziniz.

Soru 253.
$f(x) = e^{\frac{x+1}{x}}$ fonksiyonunun grafiğini türev yardımıyla çiziniz.

Soru 254.
$f(x) = \ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$ fonksiyonunun grafiğini türev yardımıyla çiziniz.

4.7 Ek Sorular

Soru 255.
Aşağıda verilen fonksiyonların grafiğini türev yardımıyla çiziniz.

a) $f(x) = \dfrac{x}{1-x^2}$

b) $f(x) = \dfrac{x^3+2}{x}$

c) $f(x) = x^2 e^{-x}$

d) $f(x) = xe^{1-x^2}$

e) $f(x) = 1-(x-2)^{\frac{2}{3}}$

f) $f(x) = x\,(x-1)^{\frac{2}{3}}$

© Dr. Metin Turgay