ANALİZ I

ÇALIŞMA SORULARI

Metin Turgay

Selçuk Üniversitesi Matematik Bölümü

2026-2027 Güz Dönemi

© Dr. Metin Turgay

Bu belgede yazım hataları bulunabilir. Eksik/yanlış olduğunu düşündüğünüz soru(ları) metin.turgay@selcuk.edu.tr adresinden iletebilirsiniz.
Gösterim: Aksi belirtilmedikçe $N = \{1, 2, 3, \dots\}$ doğal sayılar kümesini, $[\![x]\!]$ ise x reel sayısının tam kısmını (x ten büyük olmayan en büyük tam sayıyı) göstermektedir.

İçindekiler

1 KÜMELER VE SAYILAR **2**
1.1 KÜMELER . . . 2
1.2 REEL SAYILAR VE TÜMEVARIM YÖNTEMİ . . . 5
1.3 LİNEER NOKTA KÜMELERİ . . . 9

2 FONKSİYONLAR **16**
2.1 FONKSİYON KAVRAMI, GÖRÜNTÜ VE TERS GÖRÜNTÜ . . . 16
2.2 BAZI ÖZEL FONKSİYONLAR . . . 18
2.3 PARÇALI TANIMLI FONKSİYONLAR . . . 22
2.4 POLİNOMLAR VE RASYONEL FONKSİYONLAR . . . 23
2.5 TRİGONOMETRİK FONKSİYONLAR VE TERSLERİ . . . 24
2.6 ÜSTEL, LOGARİTMİK VE HİPERBOLİK FONKSİYONLAR . . . 26
2.7 EĞRİLERİN PARAMETRİK GÖSTERİMİ . . . 28

3 LİMİT **30**
3.1 DİZİLER, SINIRLILIK VE LİMİT TANIMI . . . 30
3.2 LİMİT TEOREMLERİ . . . 32
3.3 MONOTON DİZİLER . . . 33
3.4 SIKIŞTIRMA VE STOLZ TEOREMLERİ . . . 35
3.5 ALT DİZİLER, BOLZANO–WEIERSTRASS TEOREMİ, ALT VE ÜST LİMİT 38
3.6 CAUCHY DİZİLERİ VE SONSUZA IRAKSAMA . . . 39
3.7 TEKRARLAMA BAĞINTISI BULUNAN DİZİLER . . . 41
3.8 BİR FONKSİYONUN LİMİTİ . . . 43
3.9 BAZI ÖNEMLİ LİMİTLER . . . 47

© Dr. Metin Turgay

1 KÜMELER VE SAYILAR

1.1 KÜMELER

SORU 1

Boş kümenin tek olduğunu ispatlayınız. Yani $\emptyset_1$ ve $\emptyset_2$ hiç elemanı olmayan iki küme ise $\emptyset_1 = \emptyset_2$ olduğunu gösteriniz.

Yol gösterme: Boş kümenin her kümenin alt kümesi olduğunu ve küme eşitliğinin tanımını kullanınız.

SORU 2

$E = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$ evrensel küme olmak üzere

$$A = \{x \in E : x \text{ çift}\}, \qquad B = \{x \in E : x \text{ asal}\}, \qquad C = \{x \in E : x \leq 4\}$$

kümeleri veriliyor. Aşağıdaki kümeleri liste biçiminde yazınız:

(a) $A \cup B$ (b) $A \cap B \cap C$ (c) $A \setminus B$

(d) $B \setminus (A \cup C)$ (e) $(A \cup C)'$ (f) $A \Delta C$

(g) $A' \cap B'$ (h) $(A \cap B) \cup C$ (i) $A \setminus (B \setminus C)$

Ayrıca bu kümeler için $(A \cup B)' = A' \cap B'$ ve $(A \cap C)' = A' \cup C'$ eşitliklerinin sağlandığını doğrudan kontrol ediniz.

SORU 3

a küme olmayan bir nesne (örneğin bir sayı) olmak üzere $A = \{a, \{a\}, \emptyset\}$ kümesi veriliyor.

(a) $\mathcal{P}(A)$ kuvvet kümesini liste biçiminde yazınız ve $s(\mathcal{P}(A))$ sayısını bulunuz.

(b) $A \cap \mathcal{P}(A)$ kümesini bulunuz. (Burada *elemanı olmak* ($\in$) ile *alt kümesi olmak* ($\subset$) kavramlarının farkına dikkat ediniz.)

(c) $\emptyset$ kümesini eleman olarak içeren tüm $X \in \mathcal{P}(A)$ kümelerini yazınız.

SORU 4

Herhangi A, B, C kümeleri için aşağıdaki eşitlikleri ispatlayınız:

(a) $(A \cap B)' = A' \cup B'$ (De Morgan kuralı),

(b) $A \setminus B = A \cap B'$,

(c) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$,

(d) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$,

(e) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$.

© Dr. Metin Turgay

SORU 5

A ve B herhangi iki küme olsun. Aşağıdaki önermelerin birbirine denk olduğunu

$$(\text{i}) \Rightarrow (\text{ii}) \Rightarrow (\text{iii}) \Rightarrow (\text{iv}) \Rightarrow (\text{v}) \Rightarrow (\text{i})$$

gerektirmelerini ispatlayarak gösteriniz:

(i) $A \subset B$, (ii) $A \cup B = B$, (iii) $A \cap B = A$, (iv) $B' \subset A'$, (v) $A \setminus B = \emptyset$.

SORU 6

Herhangi A, B, C kümeleri için simetrik farkın aşağıdaki özelliklerini ispatlayınız:

(a) $A \,\Delta\, B = B \,\Delta\, A$,

(b) $A \,\Delta\, \emptyset = A$ ve $A \,\Delta\, A = \emptyset$,

(c) $A \cap (B \,\Delta\, C) = (A \cap B) \,\Delta\, (A \cap C)$,

(d) $A \,\Delta\, B = \emptyset \iff A = B$,

(e) $A \,\Delta\, B = A' \,\Delta\, B'$.

SORU 7

(a) Simetrik fark işleminin birleşme özelliğine sahip olduğunu, yani her A, B, C kümesi için

$$(A \,\Delta\, B) \,\Delta\, C = A \,\Delta\, (B \,\Delta\, C)$$

olduğunu ispatlayınız.

(b) A ve B verilen iki küme olsun. $A \,\Delta\, X = B$ eşitliğini sağlayan bir ve yalnız bir X kümesi bulunduğunu gösteriniz ve bu X kümesini A ile B cinsinden ifade ediniz.

Yol gösterme: (a) için, bir x elemanının eşitliğin sol tarafına ait olmasının da sağ tarafına ait olmasının da, x in A, B, C kümelerinden *tek sayıda* kümeye (yalnız birine ya da üçüne birden) ait olmasına denk olduğunu gösteriniz.

SORU 8

Bir bölümdeki 80 öğrenciden 35'i Analiz, 28'i Lineer Cebir, 22'si Soyut Matematik dersini almaktadır. 12 öğrenci Analiz ile Lineer Cebir'i, 10 öğrenci Analiz ile Soyut Matematik'i, 8 öğrenci Lineer Cebir ile Soyut Matematik'i birlikte almakta; 5 öğrenci ise üç dersi birden almaktadır. Sonlu kümelerin birleşiminin eleman sayısına ilişkin formülleri kullanarak

(a) bu derslerden en az birini alan,

(b) bu derslerden hiçbirini almayan,

(c) yalnızca bir ders alan,

(d) tam olarak iki ders alan,

© Dr. Metin Turgay

(e) Analiz ve Lineer Cebir alıp Soyut Matematik almayan

öğrenci sayılarını bulunuz. Durumu bir Venn diyagramı üzerinde gösteriniz.

SORU 9

(a) $s(A\cup B\cup C)=s(A)+s(B)+s(C)-s(A\cap B)-s(A\cap C)-s(B\cap C)+s(A\cap B\cap C)$ formülünden yararlanarak, sonlu A,B,C,D kümeleri için $s(A\cup B\cup C\cup D)$ formülünü elde ediniz.

(b) $\{1,2,3,\ldots,1000\}$ kümesinde $2,3,5$ veya 7 sayılarından en az biriyle tam bölünebilen kaç sayı vardır? Bu dört sayının hiçbiriyle tam bölünemeyen kaç sayı vardır?

SORU 10

(a) $A=\{1,2\}$ ve $B=\{a,b,c\}$ için $A\times B$ ve $A\times A$ kümelerini yazınız. $s(\mathcal{P}(A\times B))$ sayısını bulunuz.

(b) Herhangi A,B,C kümeleri için $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$ olduğunu ispatlayınız.

(c) Herhangi A,B,C kümeleri için $A\times(B\setminus C)=(A\times B)\setminus(A\times C)$ olduğunu ispatlayınız.

(d) $A=[1,3]$ ve $B=[0,2]$ aralıkları için $A\times B$ ve $B\times A$ kümelerini analitik düzlemde gösteriniz ve $(A\times B)\cap(B\times A)$ kümesini bulunuz.

SORU 11

(a) Herhangi A,B,C,D kümeleri için $(A\times B)\cup(C\times D)\subset(A\cup C)\times(B\cup D)$ olduğunu ispatlayınız.

(b) $A=\{1\}$, $B=\{2\}$, $C=\{3\}$, $D=\{4\}$ kümeleri için her iki tarafı hesaplayarak (a) daki kapsamanın genelde bir eşitlik olmadığını gösteriniz.

SORU 12

A ve B boş olmayan iki küme olsun. $A\times B=B\times A$ olması için gerek ve yeter şartın $A=B$ olduğunu ispatlayınız. A ve B kümelerinden en az biri boş küme ise $A\times B$ ve $B\times A$ hakkında ne söylenebilir?

SORU 13

(a) Herhangi A,B kümeleri için $A\subset B\iff\mathcal{P}(A)\subset\mathcal{P}(B)$ olduğunu ispatlayınız.

(b) Herhangi A,B kümeleri için $\mathcal{P}(A)\cup\mathcal{P}(B)\subset\mathcal{P}(A\cup B)$ olduğunu ispatlayınız. Bu kapsamanın eşitliğe dönüşmediği bir örnek veriniz.

(c) $s(A)=n$ olan bir A kümesi için $s(\mathcal{P}(A))=2^n$ olduğunu n üzerinden tümevarımla ispatlayınız.

© Dr. Metin Turgay

1.2 REEL SAYILAR VE TÜMEVARIM YÖNTEMİ

SORU 14

$\sqrt{2}$ sayısının irrasyonel olduğunun ispatındaki yöntemi (olmayana ergi) kullanarak aşağıdaki sayıların irrasyonel olduğunu ispatlayınız:

(a) $\sqrt{3}$ (b) $\sqrt{6}$ (c) $\sqrt[3]{2}$

SORU 15

(a) $r \in Q$ ve $x \notin Q$ olsun. $r + x \notin Q$ olduğunu; ayrıca $r \neq 0$ ise $rx \notin Q$ olduğunu ispatlayınız.

(b) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ sayısının irrasyonel olduğunu gösteriniz. Bunu kullanarak $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ sayısının da irrasyonel olduğunu gösteriniz.

(c) İki irrasyonel sayının toplamının ve çarpımının rasyonel olabileceğini birer örnekle gösteriniz.

SORU 16

n tam kare olmayan bir doğal sayı olsun. $\sqrt{n}$ sayısının irrasyonel olduğunu *iyi sıralı olma özelliğini* kullanarak ispatlayınız.

Yol gösterme: $m < \sqrt{n} < m + 1$ olacak şekilde $m \in N$ seçiniz. $\sqrt{n}$ rasyonel olsaydı $\{q \in N : q\sqrt{n} \in N\}$ kümesi boş olmazdı; bu kümenin en küçük elemanı q_0 olsun. $q_1 = q_0(\sqrt{n} - m)$ sayısının da bu kümeye ait olduğunu ve $q_1 < q_0$ olduğunu gösteriniz.

SORU 17

Her $n \in N$ için aşağıdaki eşitlikleri tümevarım yöntemiyle ispatlayınız:

(a) $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

(b) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$

(c) $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$

(d) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + n(n+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$

SORU 18

Her $n \in N$ için aşağıdaki eşitlikleri tümevarım yöntemiyle ispatlayınız:

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \cdot 2^k = (n-1)2^{n+1} + 2$

© Dr. Metin Turgay

(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}k^2 = (-1)^{n+1}\frac{n(n+1)}{2}$

SORU 19

Her $n \in N$ için aşağıdaki bölünebilme önermelerini tümevarım yöntemiyle ispatlayınız:

(a) $n^3 + 2n$ sayısı 3 ile tam bölünür.

(b) $4^n + 6n - 1$ sayısı 9 ile tam bölünür.

(c) $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ sayısı 7 ile tam bölünür.

(d) $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ sayısı 133 ile tam bölünür.

SORU 20

Aşağıdaki eşitsizlikleri tümevarım yöntemiyle ispatlayınız. Başlangıç değerlerine dikkat ediniz.

(a) Her $n \in N_5 = \{5, 6, 7, \dots\}$ için $2^n > n^2$.

(b) Her $n \in N_7$ için $n! > 3^n$. ($n = 6$ için eşitsizliğin sağlanmadığını da gösteriniz.)

(c) Her $n \geq 2$ doğal sayısı için $1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$.

(d) Her $n \in N$ için $1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \cdots + \dfrac{1}{n^2} \leq 2 - \dfrac{1}{n}$.

SORU 21

(a) $x > -1$, $x \neq 0$ ve $n \geq 2$ doğal sayı ise $(1+x)^n > 1 + nx$ olduğunu (kesin Bernoulli eşitsizliği) ispatlayınız.

(b) $x_1, x_2, \dots, x_n \in [0, 1]$ ise

$$(1 - x_1)(1 - x_2)\cdots(1 - x_n) \geq 1 - (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$$

olduğunu tümevarımla ispatlayınız.

(c) Bernoulli eşitsizliğini kullanarak her $n \in N$ için

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq 2 \qquad \text{ve} \qquad \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^n \geq \frac{1}{2}$$

olduğunu gösteriniz.

SORU 22

$F_1 = F_2 = 1$ ve $n \geq 1$ için $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ ile tanımlanan Fibonacci sayıları için aşağıdakilerin her $n \in N$ için doğru olduğunu ispatlayınız:

© Dr. Metin Turgay

(a) $F_1 + F_2 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1$

(b) $F_1^2 + F_2^2 + \cdots + F_n^2 = F_n F_{n+1}$

(c) $F_{n+2}F_n - F_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}$ (Cassini özdeşliği)

(d) $\left(\frac{3}{2}\right)^{n-2} \leq F_n \leq 2^{n-1}$

Yol gösterme: (d) için $P(n)$: "eşitsizlik hem F_n hem de F_{n+1} için doğrudur" önermesine tümevarım uygulayınız.

SORU 23

Binom formülünü kullanarak aşağıdakileri bulunuz:

(a) $\left(2x - \frac{1}{x}\right)^{11}$ açılımında x^5 li terimin katsayısı,

(b) $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^{9}$ açılımında x ten bağımsız (sabit) terim,

(c) $(1+x)^{10}(1-x)^{10}$ çarpımının açılımında x^6 lı terimin katsayısı,

(d) $(a+b)^{12}$ açılımının ortanca terimi,

(e) 11^{10} sayısının son iki basamağı. ($11 = 10 + 1$ *yazınız.*)

SORU 24

p reel sayı ve $k \in N$ için $\binom{p}{k} = \frac{p(p-1)\cdots(p-k+1)}{k!}$ biçiminde tanımlanan (genelleştirilmiş) binom katsayısını ele alalım (ayrıca $\binom{p}{0} = 1$ kabul edilir).

(a) $\binom{1/2}{3}$ ve $\binom{-2}{3}$ sayılarını hesaplayınız. Her $k \in N$ için $\binom{-1}{k} = (-1)^k$ olduğunu gösteriniz.

(b) Her $p \in R$ ve $k \in N$ için $\binom{p}{k-1} + \binom{p}{k} = \binom{p+1}{k}$ olduğunu ispatlayınız.

(c) $n, k \in N$ ve $1 \leq k \leq n$ için $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$ olduğunu ispatlayınız.

SORU 25

Binom formülünden ve binom katsayılarının özelliklerinden yararlanarak aşağıdaki eşitlikleri ispatlayınız:

(a) $n \geq 2$ için $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \, k\binom{n}{k} = 0$,

© Dr. Metin Turgay

(b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$,

(c) $n \geq 2$ için $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k} = n(n+1)2^{n-2}$,

(d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k\binom{n}{k} = 3^n$.

SORU 26

(a) $(1+x)^{2n} = (1+x)^n(1+x)^n$ özdeşliğinin her iki yanındaki x^n li terimlerin katsayılarını karşılaştırarak

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$$

olduğunu gösteriniz.

(b) Daha genel olarak m, n, r doğal sayıları için

$$\sum_{k=0}^{r} \binom{m}{k}\binom{n}{r-k} = \binom{m+n}{r}$$

olduğunu ispatlayınız (Vandermonde özdeşliği).

SORU 27

Bu soruda her $n \in N$ için $2 \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3$ olduğu ispatlanacaktır.

(a) $0 \leq k \leq n$ için $\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} \leq \frac{1}{k!}$ olduğunu gösteriniz.

(b) Her $k \in N$ için $k! \geq 2^{k-1}$ olduğunu tümevarımla ispatlayınız.

(c) Binom formülünü, (a), (b) şıklarını ve geometrik toplam formülünü (bkz. Soru 29) kullanarak $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3$ olduğunu gösteriniz. Sol taraftaki eşitsizliği de ispatlayınız.

SORU 28

Toplam ve çarpım sembollerinin tanımını kullanarak aşağıdakileri hesaplayınız (gerekirse n cinsinden kapalı biçimde yazınız):

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{20}(3k-2)$ (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2$

© Dr. Metin Turgay

(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{50}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$ (d) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)$

(e) $\displaystyle\prod_{k=2}^{n}\frac{k-1}{k+1}$ (f) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} j$

SORU 29

(a) Her $n \in N$ ve (a_k) reel sayıları için $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1}-a_k) = a_{n+1}-a_1$ olduğunu (teleskopik toplam) tümevarımla ispatlayınız.

(b) (a) şıkkını kullanarak aşağıdaki eşitlikleri ispatlayınız:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}} = \sqrt{n+1}-1, \qquad \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{4}-\frac{1}{2(n+1)(n+2)}.$$

(c) $r \neq 1$ reel sayısı için $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} r^k = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$ olduğunu ispatlayınız (geometrik toplam).

(d) $a, b \in R$ ve $n \in N$ için $a^n - b^n = (a-b)\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k}b^k$ olduğunu gösteriniz. Buradan $0 \leq a < b$ ise $a^n < b^n$ olduğunu çıkarınız.

SORU 30

$n \geq 8$ olan her doğal sayının $a, b \geq 0$ tam sayılar olmak üzere $n = 3a + 5b$ biçiminde yazılabileceğini tümevarımla ispatlayınız. (7 sayısının bu biçimde yazılamadığını da gösteriniz.)

SORU 31

Tümevarım ilkesi, iyi sıralı olma özelliği kullanılarak ispatlanabilir. Bu soruda karşıt yönü gösteriniz: Tümevarım ilkesini kabul ederek N nin boş olmayan her alt kümesinin bir en küçük elemanı bulunduğunu (iyi sıralı olma özelliğini) ispatlayınız.

Yol gösterme: $S \subset N$ en küçük elemanı olmayan bir küme olsun. $P(n)$: "$1, 2, \ldots, n$ sayılarının hiçbiri S ye ait değildir" önermesine tümevarım uygulayarak $S = \emptyset$ olduğunu gösteriniz.

1.3 LİNEER NOKTA KÜMELERİ

SORU 32

Reel sayılardaki $<$ bağıntısının temel özelliklerini (üç durum, geçişme, toplama ve çarpılabilme özellikleri) kullanarak her $a, b, c, d \in R$ için aşağıdakileri ispatlayınız:

(a) $a < b$ ve $c < d$ ise $a + c < b + d$,

© Dr. Metin Turgay

(b) $a \neq 0$ ise $a^2 > 0$; özel olarak $1 > 0$,

(c) $0 < a < b$ ise $0 < \dfrac{1}{b} < \dfrac{1}{a}$,

(d) $0 \leq a < b$ ise $a^2 < b^2$ ve $\sqrt{a} < \sqrt{b}$.

SORU 33

Aşağıdaki eşitsizlikleri ispatlayınız:

(a) $a, b \geq 0$ ise $\sqrt{ab} \leq \dfrac{a+b}{2}$; eşitlik ancak $a = b$ için sağlanır. (Aritmetik–geometrik ortalama eşitsizliği)

(b) $a, b > 0$ ise $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} \geq 2$.

(c) $a, b, c > 0$ ise $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$.

(d) $a, b, c \in R$ ise $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$.

SORU 34

Aşağıdaki kümelerin alttan ve üstten sınırlı olup olmadığını belirleyiniz. Varsa supremum ve infimumlarını bulunuz; bu sayıların kümeye ait olup olmadığını (yani max ve min elemanların var olup olmadığını) belirtiniz.

(a) $A = \{x \in R : x^2 - 3x + 2 < 0\}$

(b) $B = \left\{\dfrac{n+1}{n} : n \in N\right\}$

(c) $C = \left\{1 - \dfrac{(-1)^n}{n} : n \in N\right\}$

(d) $D = \{x \in Q : x^2 < 2\}$

(e) $E = \{x \in R : x^2 \leq 2x + 3\}$

(f) $F = \{x \in R : x^3 > x\}$

SORU 35

Aşağıdaki kümelerin (varsa) supremum, infimum, maksimum ve minimum değerlerini bulunuz. Cevaplarınızı gerekçelendiriniz.

(a) $\left\{(-1)^n + \dfrac{1}{n} : n \in N\right\}$

(b) $\left\{\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{m} : n, m \in N\right\}$

(c) $\{x \in R : |x-1| + |x+2| < 5\}$

(d) $\left\{\dfrac{n}{n^2+1} : n \in N\right\}$

(e) $\left\{x + \dfrac{1}{x} : x > 0\right\}$

(f) $\left\{\dfrac{1}{2^n} + \dfrac{1}{3^m} : n, m \in N\right\}$

SORU 36

Supremum ve infimumun yaklaşım özelliklerini kullanarak aşağıdaki eşitlikleri ispatlayınız:

© Dr. Metin Turgay

(a) $\sup\left\{1-\frac{1}{n} : n \in N\right\} = 1,$

(b) $\inf\left\{\frac{1}{n} : n \in N\right\} = 0$ (Arşimet prensibini kullanınız),

(c) $\sup\left\{\frac{n}{2n+1} : n \in N\right\} = \frac{1}{2},$

(d) $\inf\left\{\frac{2n+3}{n+1} : n \in N\right\} = 2$ ve bu kümenin maksimum elemanı $\frac{5}{2}$ dir.

SORU 37

$A \subset R$ boş olmayan bir küme olsun.

(a) Bir kümenin en fazla bir supremumu olabileceğini ispatlayınız.

(b) M sayısı A kümesinin bir üst sınırı olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $x > M - \varepsilon$ olacak biçimde bir $x \in A$ varsa $M = \sup A$ olduğunu ispatlayınız. (Böylece supremumun yaklaşım özelliği supremumu tam olarak karakterize eder.)

(c) İnfimum için benzer karakterizasyonu ifade ve ispat ediniz.

(d) Bir $a \in A$ elemanı her $x \in A$ için $x \leq a$ koşulunu sağlıyorsa $a = \sup A$ olduğunu, dolayısıyla $\max A = a$ olduğunu gösteriniz.

SORU 38

A ve B, R nin boş olmayan sınırlı alt kümeleri olsun. Aşağıdakileri ispatlayınız:

(a) $A \subset B$ ise $\sup A \leq \sup B$ ve $\inf A \geq \inf B$.

(b) $-A = \{-x : x \in A\}$ olmak üzere $\sup(-A) = -\inf A$ ve $\inf(-A) = -\sup A$.

(c) $A + B = \{a + b : a \in A,\ b \in B\}$ olmak üzere $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.

(d) $c \in R$ ve $cA = \{cx : x \in A\}$ olmak üzere; $c > 0$ ise $\sup(cA) = c \sup A$, $c < 0$ ise $\sup(cA) = c \inf A$.

SORU 39

A ve B, R nin boş olmayan sınırlı alt kümeleri olsun.

(a) $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A,\ \sup B\}$ olduğunu ispatlayınız.

(b) $A, B \subset (0, \infty)$ ve $AB = \{ab : a \in A,\ b \in B\}$ ise $\sup(AB) = \sup A \cdot \sup B$ olduğunu ispatlayınız.

(c) Her $a \in A$ ve her $b \in B$ için $a \leq b$ olsun. $\sup A \leq \inf B$ olduğunu gösteriniz. Ayrıca $\sup A = \inf B$ olması için gerek ve yeter şartın, her $\varepsilon > 0$ için $b - a < \varepsilon$ olacak biçimde $a \in A$ ve $b \in B$ bulunması olduğunu ispatlayınız.

© Dr. Metin Turgay

SORU 40

$S = \{x \in R : x > 0 \text{ ve } x^2 < 2\}$ kümesini göz önüne alalım.

(a) S nin boş olmadığını ve üstten sınırlı olduğunu gösteriniz. Tamlık aksiyomuna göre $s = \sup S$ vardır.

(b) $s^2 = 2$ olduğunu ispatlayınız; yani $s^2 < 2$ ve $s^2 > 2$ durumlarının her birinin bir çelişkiye götürdüğünü gösteriniz.

(c) $S \cap Q$ kümesinin Q içinde bir supremumu olmadığını göstererek tamlık aksiyomunun Q için geçerli olmadığı sonucuna varınız.

Yol gösterme: $s^2 < 2$ ise $\left(s + \frac{1}{n}\right)^2 < 2$ olacak biçimde bir $n \in N$ bulunuz; $s^2 > 2$ ise $s - \frac{1}{n}$ sayısının da S için bir üst sınır olduğu bir $n \in N$ bulunuz.

SORU 41

Aşağıdaki eşitsizliklerin çözüm kümelerini aralık biçiminde bulunuz:

(a) $|3x - 2| < 4$

(b) $|x + 1| \geq |2x - 4|$

(c) $|x - 1| + |x - 2| > 3$

(d) $\big||x| - 2\big| \leq 1$

(e) $|x^2 - 4| < 3$

(f) $|x - 1| - |x + 2| \geq 1$

SORU 42

(a) $\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right| < 1$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

(b) $|x^2 - 2x| < x$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

(c) $|x| + |x - 1| + |x - 2| = 3$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

(d) $|x - 2| < \delta$ olduğunda $|x^2 - 4| < 1$ eşitsizliğinin sağlanmasını garanti eden bir $\delta > 0$ sayısı bulunuz.

(e) $|x - 1| < \delta$ olduğunda $\left|\dfrac{1}{x} - 1\right| < \dfrac{1}{10}$ eşitsizliğinin sağlanmasını garanti eden bir $\delta > 0$ sayısı bulunuz.

SORU 43

Her $a, b \in R$ ve $a_1, \ldots, a_n \in R$ için aşağıdakileri ispatlayınız:

(a) $|ab| = |a|\,|b|$ ve $b \neq 0$ ise $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$,

(b) $\big||a| - |b|\big| \leq |a - b|$,

(c) $|a_1 + a_2 + \cdots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|$ (tümevarımla),

(d) $\max\{a, b\} = \dfrac{a + b + |a - b|}{2}$ ve $\min\{a, b\} = \dfrac{a + b - |a - b|}{2}$,

© Dr. Metin Turgay

(e) $|a+b| = |a| + |b| \iff ab \geq 0$.

SORU 44

(a) $x, y, a \in R$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $x > y - \varepsilon$ ise $x \geq y$ olduğunu; her $\varepsilon > 0$ için $|a| < \varepsilon$ ise $a = 0$ olduğunu ispatlayınız.

(b) $a \geq 0$ olmak üzere $|x| \geq a \iff (x \geq a$ veya $x \leq -a)$ olduğunu ispatlayınız.

(c) $x, y \in R$ olsun. Her $n \in N$ için $|x - y| \leq \dfrac{1}{n}$ ise $x = y$ olduğunu gösteriniz.

SORU 45

(a) Bir a noktasının iki komşuluğunun kesişiminin yine a nın bir komşuluğu olduğunu gösteriniz.

(b) $a \neq b$ ise a ve b noktalarının ayrık komşuluklarının bulunduğunu gösteriniz. ($\delta = |a-b|/2$ *alınız.*)

(c) (a, b) açık aralığının her noktasının, tamamen (a, b) içinde kalan bir komşuluğu bulunduğunu gösteriniz. $[a, b]$ kapalı aralığı için bu özelliğin a noktasında sağlanmadığını gösteriniz.

SORU 46

Aşağıdaki kümelerin tüm yığılma noktalarını bulunuz. Hangi yığılma noktalarının kümeye ait olduğunu belirtiniz ve (varsa) kümenin üst limitini (lim sup) ve alt limitini (lim inf) yazınız.

(a) $\left\{\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{m} : n, m \in N\right\}$

(b) $(0, 1) \cup \{2\}$

(c) $Q \cap [0, 1]$

(d) $\left\{(-1)^n \dfrac{n}{n+1} : n \in N\right\}$

(e) $\left\{\sin\dfrac{n\pi}{2} + \dfrac{1}{n} : n \in N\right\}$

(f) N

SORU 47

$A \subset R$ olsun.

(a) Sonlu bir kümenin hiçbir yığılma noktası olmadığını ispatlayınız.

(b) $a \in R$ noktasının A kümesinin bir yığılma noktası olması için gerek ve yeter şartın, a nın her δ-komşuluğunda A nın sonsuz çoklukta elemanı bulunması olduğunu ispatlayınız.

(c) A boş olmayan ve alttan sınırlı olsun. $\inf A \notin A$ ise $\inf A$ sayısının A kümesinin bir yığılma noktası olduğunu ispatlayınız.

(d) $B \subset R$ ve $A \subset B$ ise A nın her yığılma noktasının B nin de bir yığılma noktası olduğunu gösteriniz.

© Dr. Metin Turgay

SORU 48

Arşimet prensibini ($a, b > 0$ ise $na > b$ olacak biçimde bir $n \in N$ vardır) kullanarak aşağıdakileri ispatlayınız:

(a) Her $x \in R$ için $n > x$ olacak biçimde bir $n \in N$ vardır; yani N üstten sınırlı değildir.

(b) Her $\varepsilon > 0$ için $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$ olacak biçimde bir $n \in N$ vardır.

(c) $x \geq 0$ ve her $n \in N$ için $x \leq \dfrac{1}{n}$ ise $x = 0$ dır.

(d) $a > 1$ ve $M > 0$ verilsin. $a^n > M$ olacak biçimde bir $n \in N$ vardır. ($a = 1 + h$ *yazıp Bernoulli eşitsizliğini kullanınız.*)

(e) $0 < r < 1$ ve $\varepsilon > 0$ verilsin. $r^n < \varepsilon$ olacak biçimde bir $n \in N$ vardır.

SORU 49

(A_n) kümelerinden oluşan bir aile için

$$\bigcap_{n\in N} A_n = \{x : \text{her } n \in N \text{ için } x \in A_n\}, \qquad \bigcup_{n\in N} A_n = \{x : \text{en az bir } n \in N \text{ için } x \in A_n\}$$

olarak tanımlanır. Arşimet prensibinden yararlanarak aşağıdaki eşitlikleri ispatlayınız:

(a) $\displaystyle\bigcap_{n\in N}\left(0, \frac{1}{n}\right) = \emptyset$ (b) $\displaystyle\bigcap_{n\in N}\left[0, \frac{1}{n}\right) = \{0\}$

(c) $\displaystyle\bigcup_{n\in N}\left[\frac{1}{n}, 2 - \frac{1}{n}\right] = (0, 2)$ (d) $\displaystyle\bigcap_{n\in N}\left(-\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right) = [0, 1]$

SORU 50

(a) $a < b$ olan her a, b reel sayısı için $a < q < b$ olacak biçimde bir $q \in Q$ bulunduğunu şu yolla ispatlayınız: $a < b$ verildiğinde $n(b - a) > 1$ olacak biçimde $n \in N$ seçiniz ve $m = [\![na]\!] + 1$ alınız; $a < \dfrac{m}{n} < b$ olduğunu gösteriniz.

(b) Her $a < b$ için $a < x < b$ olacak biçimde bir irrasyonel x sayısı bulunduğunu ispatlayınız. ($a - \sqrt{2}$ *ile* $b - \sqrt{2}$ *arasında bir rasyonel sayı alıp Soru 15 sonucunu kullanınız.*)

(c) Her (a, b) aralığında sonsuz çoklukta rasyonel sayı bulunduğunu gösteriniz.

(d) Her $x \in R$ ve her $\varepsilon > 0$ için $|x - q| < \varepsilon$ olacak biçimde bir $q \in Q$ bulunduğunu gösteriniz.

© Dr. Metin Turgay

SORU 51

(a) Aşağıdaki sayıları hesaplayınız:

$$[\![-\pi]\!], \quad [\![-2]\!], \quad [\![\sqrt{50}]\!], \quad [\![-7/3]\!], \quad \lceil -7/3 \rceil, \quad \lceil 4{,}2 \rceil, \quad [\![0{,}99]\!], \quad \lceil -0{,}5 \rceil.$$

(b) Aşağıdaki denklemlerin çözüm kümelerini bulunuz:

$$[\![x]\!] = -3, \qquad [\![2x+1]\!] = 4, \qquad [\![x/3]\!] = 2, \qquad \lceil x \rceil = 2.$$

(c) $[\![x]\!]^2 - [\![x]\!] - 6 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

SORU 52

(a) $[\![x]\!] + [\![-x]\!]$ ifadesinin değerini $x \in Z$ ve $x \notin Z$ durumları için ayrı ayrı bulunuz.

(b) $[\![3x-1]\!] = 2x$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

(c) $[\![x^2]\!] = 4$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

(d) $[\![\dfrac{x+1}{2}]\!] = 3$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

(e) $x\,[\![x]\!] = 3$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

SORU 53

Her $x, y \in R$ ve $n \in N$ için aşağıdakileri ispatlayınız:

(a) $x - 1 < [\![x]\!] \leq x$,

(b) $[\![x]\!] + [\![y]\!] \leq [\![x+y]\!] \leq [\![x]\!] + [\![y]\!] + 1$,

(c) $x \in Z$ ise $[\![-x]\!] = -[\![x]\!]$, $x \notin Z$ ise $[\![-x]\!] = -[\![x]\!] - 1$; ayrıca $\lceil x \rceil = -[\![-x]\!]$,

(d) $[\![nx]\!] \geq n[\![x]\!]$,

(e) $[\![\dfrac{[\![x]\!]}{n}]\!] = [\![\dfrac{x}{n}]\!]$.

SORU 54

Her $x, y \in R$ ve $n \in N$ için aşağıdakileri ispatlayınız:

(a) $[\![x]\!] + [\![x + \frac{1}{2}]\!] = [\![2x]\!]$,

(b) $[\![2x]\!] + [\![2y]\!] \geq [\![x]\!] + [\![y]\!] + [\![x+y]\!]$,

(c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} [\![x + \frac{k}{n}]\!] = [\![nx]\!]$ (Hermite özdeşliği).

Yol gösterme: $x = [\![x]\!] + t$, $0 \leq t < 1$ yazınız ve t nin bulunduğu alt aralıklara göre inceleme yapınız.

© Dr. Metin Turgay

2 FONKSİYONLAR

2.1 FONKSİYON KAVRAMI, GÖRÜNTÜ VE TERS GÖRÜNTÜ

SORU 55

$A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ kümesi veriliyor.

(a) A da $\beta = \{(x, y) : x$ sayısı y yi tam böler$\}$ bağıntısını liste biçiminde yazınız. β bağıntısının kaç elemanı vardır? β, A dan A ya bir fonksiyon mudur?

(b) $\gamma = \{(x, y) \in A \times A : xy = 12\}$ bağıntısını liste biçiminde yazınız. γ nın A dan A ya bir fonksiyon olduğunu gösteriniz. γ birebir midir, örten midir? $\gamma \circ \gamma$ fonksiyonunu bulunuz.

SORU 56

$s(A) = m$ ve $s(B) = n$ olan sonlu A ve B kümeleri veriliyor.

(a) A dan B ye kaç tane bağıntı tanımlanabilir?

(b) A dan B ye kaç tane fonksiyon tanımlanabilir?

(c) $m \leq n$ ise A dan B ye kaç tane birebir fonksiyon tanımlanabilir?

(d) $m = n$ ise A dan B ye kaç tane birebir örten fonksiyon tanımlanabilir?

(e) $A = \{1, 2, 3\}$ ve $B = \{a, b\}$ için A dan B ye tanımlanabilen tüm örten fonksiyonları liste biçiminde yazınız.

SORU 57

Aşağıda verilen kuralların belirtilen kümeler arasında bir fonksiyon tanımlayıp tanımlamadığını, fonksiyon tanımındaki iki şarta (tanım kümesinin her elemanının bir görüntüsünün bulunması ve bu görüntünün tek olması) göre gerekçelendiriniz. (a)–(d) şıklarında fonksiyon tanımlamayan kurallar için, tanım kümesini ve/veya değer kümesini uygun biçimde kısıtlayarak (örneğin $y \geq 0$ alarak) bir fonksiyon elde ediniz.

(a) $f : R \to R, \ f(x) = \sqrt{x - 1}$

(b) $\{(x, y) \in R \times R : y^2 = x\}$

(c) $\{(x, y) \in R \times R : y^3 = x\}$

(d) $\{(x, y) \in R \times R : x^2 + y^2 = 1\}$

(e) $f : Q \to Z, \ f\left(\frac{p}{q}\right) = p + q \ \ (p \in Z, q \in N$ herhangi$)$

(f) $g : Q \to Z, \ g\left(\frac{p}{q}\right) = p + q \ \ (p \in Z, q \in N$ ve p/q sadeleşmiş biçimde$)$

© Dr. Metin Turgay

SORU 58

Aşağıdaki fonksiyonların en geniş tanım kümelerini ve görüntü kümelerini bulunuz:

(a) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$

(b) $f(x) = \dfrac{x}{1 + |x|}$

(c) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$

(d) $f : [0, 5] \to R, \;\; f(x) = x^2 - 6x + 10$

(e) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 4x + 5}$

(f) $f(x) = \sqrt{x - 1} + \sqrt{3 - x}$

SORU 59

$f : R \to R$, $f(x) = x^2 - 2x$ fonksiyonu veriliyor. Aşağıdaki kümeleri bulunuz:

(a) $f([0, 3])$ (b) $f((-1, 1))$ (c) $f^{-1}(\{3\})$

(d) $f^{-1}([-1, 0])$ (e) $f^{-1}((-\infty, -2))$ (f) $f^{-1}(R)$

Ayrıca $f\big(f^{-1}([-5, 0])\big)$ ve $f^{-1}\big(f([0, 1])\big)$ kümelerini bulup sırasıyla $[-5, 0]$ ve $[0, 1]$ kümeleriyle karşılaştırınız.

SORU 60

$f : X \to Y$ bir fonksiyon, $E \subset X$ ve $D \subset Y$ olsun. Aşağıdakileri ispatlayınız:

(a) $E \subset f^{-1}(f(E))$; f birebir ise $E = f^{-1}(f(E))$.

(b) $f(f^{-1}(D)) \subset D$; f örten ise $f(f^{-1}(D)) = D$.

(c) $f(f^{-1}(D)) = D \cap f(X)$.

(a) ve (b) deki kapsamaların genelde eşitlik olmadığını Soru 59 yardımıyla örnekleyiniz.

SORU 61

$f : X \to Y$ bir fonksiyon ve $A, B \subset X$ olsun.

(a) $f(A) \setminus f(B) \subset f(A \setminus B)$ olduğunu ispatlayınız.

(b) f birebir ise $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ ve $f(A \setminus B) = f(A) \setminus f(B)$ olduğunu ispatlayınız.

(c) Karşıt olarak, X in her A, B alt kümesi için $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ oluyorsa f nin birebir olduğunu ispatlayınız.

(d) $X = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $f(x) = |x|$, $A = \{-2, -1, 0\}$ ve $B = \{0, 1, 2\}$ için $f(A \cap B)$, $f(A) \cap f(B)$, $f(A \setminus B)$ ve $f(A) \setminus f(B)$ kümelerini hesaplayarak birebirlik şartının gerekliliğini gözlemleyiniz.

SORU 62

$f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ fonksiyonlar, $E \subset X$ ve $D \subset Z$ olsun.

(a) $(g \circ f)(E) = g(f(E))$ olduğunu ispatlayınız.

© Dr. Metin Turgay

(b) $(g \circ f)^{-1}(D) = f^{-1}\big(g^{-1}(D)\big)$ olduğunu ispatlayınız.

(c) $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = x^2$ $(f, g : R \to R)$ ve $D = [1, 9]$ için $(g \circ f)^{-1}(D)$ kümesini hem doğrudan hem de (b) deki eşitliği kullanarak hesaplayınız.

SORU 63

(a) $f(x) = \sqrt{x+2}$ ve $g(x) = \sqrt{3-x}$ fonksiyonları için $f + g$, $f \cdot g$, f/g ve g/f fonksiyonlarının kurallarını ve tanım kümelerini bulunuz.

(b) $f(x) = x^2 - 1$ ve $g(x) = x + 1$ $(f, g : R \to R)$ için f/g fonksiyonunu bulunuz. f/g ile $h : R \to R$, $h(x) = x - 1$ fonksiyonu eşit midir?

(c) Aşağıdaki fonksiyon çiftlerinin (en geniş tanım kümelerinde) eşit olup olmadığını fonksiyon eşitliği tanımına göre belirleyiniz:

$$\text{(i) } f(x) = x,\ g(x) = \sqrt{x^2}; \quad \text{(ii) } f(x) = \ln(x^2),\ g(x) = 2\ln x;$$
$$\text{(iii) } f(x) = \frac{|x|}{x},\ g(x) = \operatorname{sgn}(x) \ \ (x \neq 0); \quad \text{(iv) } f(x) = 1,\ g(x) = \sin^2 x + \cos^2 x.$$

2.2 BAZI ÖZEL FONKSİYONLAR

SORU 64

Aşağıdaki fonksiyonların birebir ve/veya örten olup olmadığını tanıma başvurarak belirleyiniz:

(a) $f : R \to R,\ f(x) = 3x - 7$ (b) $f : R \to R,\ f(x) = x^2$

(c) $f : [0, \infty) \to [0, \infty),\ f(x) = x^2$ (d) $f : Z \to Z,\ f(n) = 2n$

(e) $f : Z \to Z,\ f(n) = [\![n/2]\!]$ (f) $f : R \setminus \{1\} \to R \setminus \{2\},\ f(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$

(g) $f : R \to R,\ f(x) = x|x|$ (h) $f : N \times N \to N,\ f(m, n) = m + n$

SORU 65

$f : A \to B$, $g : B \to C$ ve $h : C \to D$ fonksiyonları veriliyor. Aşağıdakileri ispatlayınız:

(a) f ve g birebir ise $g \circ f$ birebirdir.

(b) f ve g örten ise $g \circ f$ örtendir.

(c) $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ (bileşke işleminin birleşme özelliği).

(d) f ve g birebir örten ise $g \circ f$ de birebir örtendir ve $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ dir.

SORU 66

$f : A \to B$ ve $g : B \to C$ fonksiyonları veriliyor.

(a) $g \circ f$ birebir ise f nin birebir; $g \circ f$ örten ise g nin örten olduğunu ispatlayınız.

© Dr. Metin Turgay

(b) $g \circ f$ birebir örten olduğu hâlde f nin örten, g nin birebir olmadığı bir örnek veriniz.

(c) $g \circ f$ birebir ve f örten ise g nin birebir olduğunu ispatlayınız.

(d) $g \circ f$ örten ve g birebir ise f nin örten olduğunu ispatlayınız.

(e) $f : A \to B$ fonksiyonunun birebir örten olması için gerek ve yeter şartın $g \circ f = I_A$ ve $f \circ g = I_B$ olacak biçimde bir $g : B \to A$ fonksiyonunun bulunması olduğunu ispatlayınız.

SORU 67

Aşağıdaki fonksiyonların birebir örten olduğunu gösteriniz ve ters fonksiyonlarını bulunuz. Her biri için $f \circ f^{-1}$ ve $f^{-1} \circ f$ bileşkelerinin birim fonksiyon olduğunu kontrol ediniz.

(a) $f : R \to R, \;\; f(x) = 5 - 2x$

(b) $f : R \setminus \{-1\} \to R \setminus \{2\}, \;\; f(x) = \dfrac{2x-3}{x+1}$

(c) $f : [1, \infty) \to [0, \infty), \;\; f(x) = x^2 - 2x + 1$

(d) $f : R \to R, \;\; f(x) = x^3 + 1$

(e) $f : R \to R, \;\; f(x) = \begin{cases} 2x, & x < 1 \\ x + 1, & x \geq 1 \end{cases}$

(f) $f : (0, \infty) \to (0, 1), \;\; f(x) = \dfrac{x}{1+x}$

SORU 68

$a, b, c, d \in R$, $c \neq 0$ ve $ad - bc \neq 0$ olmak üzere

$$f : R \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\} \to R \setminus \left\{\frac{a}{c}\right\}, \qquad f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$$

fonksiyonu veriliyor.

(a) f nin birebir örten olduğunu gösteriniz ve f^{-1} i bulunuz.

(b) $f \circ f = I$ (yani $f = f^{-1}$) olması için gerek ve yeter şartın $a + d = 0$ olduğunu ispatlayınız.

(c) (b) yi kullanarak $f(x) = \dfrac{x+2}{x-1}$ fonksiyonunun kendi tersine eşit olduğunu gösteriniz. Ayrıca $g(x) = \dfrac{3x-1}{x+k}$ fonksiyonunun kendi tersine eşit olmasını sağlayan k sayısını bulunuz.

(d) $ad - bc = 0$ ise f hakkında ne söylenebilir?

© Dr. Metin Turgay

SORU 69

Aşağıdaki kümelerin denk olduğunu, aralarında birebir örten bir fonksiyon kurarak gösteriniz:

(a) N ve $2N = \{2, 4, 6, \dots\}$,

(b) N ve Z ($f(n) = n/2$ *(n çift),* $f(n) = -(n-1)/2$ *(n tek) fonksiyonunu inceleyiniz*),

(c) $a < b$ olmak üzere $(0, 1)$ ve (a, b),

(d) $(-1, 1)$ ve R ($f(x) = \dfrac{x}{1 - |x|}$ *fonksiyonunu inceleyiniz*),

(e) $(0, 1)$ ve $(1, \infty)$.

SORU 70

(a) Kümeler arasındaki denklik bağıntısının ($\simeq$) yansıma, simetri ve geçişme özelliklerine sahip olduğunu ispatlayınız.

(b) $f : [0, 1] \to [0, 1)$ fonksiyonu, $n \in N$ için $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n+1}$ ve diğer tüm x ler için $f(x) = x$ biçiminde tanımlanıyor. f nin birebir örten olduğunu gösteriniz. Buradan $[0, 1] \simeq [0, 1)$ olduğunu çıkarınız.

(c) (b) deki fikri kullanarak $(0, 1) \simeq [0, 1]$ olduğunu gösteriniz.

SORU 71

(a) $f : N \times N \to N$, $f(m, n) = 2^{m-1}(2n - 1)$ fonksiyonunun birebir örten olduğunu gösteriniz. Buradan $N \times N$ kümesinin sayılabilir olduğunu çıkarınız.

(b) $Z \times Z$ kümesinin sayılabilir olduğunu gösteriniz.

(c) (*Cantor teoremi*) Herhangi bir A kümesi için örten bir $f : A \to \mathcal{P}(A)$ fonksiyonunun bulunamayacağını ispatlayınız. Buradan $\mathcal{P}(N)$ kümesinin sayılabilir olmadığı sonucunu çıkarınız.

Yol gösterme: (c) için $B = \{x \in A : x \notin f(x)\}$ kümesini inceleyiniz.

SORU 72

Aşağıdaki fonksiyonların artan, azalan, azalmayan veya artmayan oldukları aralıkları (türev kullanmadan, yalnızca tanıma başvurarak) belirleyiniz:

(a) $f(x) = -2x + 5$ ve $f(x) = x^2 + 4x$,

(b) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ fonksiyonunun $(0, \infty)$ ve $(-\infty, 0)$ aralıklarının her birinde azalan olduğunu, fakat $R \setminus \{0\}$ kümesi üzerinde azalan *olmadığını* gösteriniz,

(c) $f(x) = |x - 1| + |x + 1|$,

(d) $f(x) = [\![x]\!]$ fonksiyonunun R üzerinde azalmayan fakat artan olmadığını gösteriniz.

© Dr. Metin Turgay

SORU 73

(a) $f(x) = x^3$ fonksiyonunun R üzerinde artan olduğunu tanımı kullanarak ispatlayınız.

(b) $f(x) = \dfrac{x}{1+x}$ fonksiyonunun $(-1, \infty)$ aralığında; $f(x) = \sqrt{x}$ fonksiyonunun $[0, \infty)$ aralığında artan olduğunu ispatlayınız.

(c) f ve g, bir E kümesi üzerinde artan fonksiyonlar ise $f+g$ nin de E üzerinde artan olduğunu gösteriniz. Ayrıca f ve g pozitif değerli ise $f \cdot g$ nin artan olduğunu gösteriniz; pozitiflik şartı kaldırılırsa bu sonucun doğru olmadığını bir örnekle gösteriniz.

(d) E üzerinde artan (veya azalan) bir fonksiyonun birebir olduğunu ispatlayınız. $f : E \to f(E)$ artan ise f^{-1} in de artan olduğunu gösteriniz.

SORU 74

(a) Aşağıdaki fonksiyonların tek veya çift olup olmadığını araştırınız:

$$x^4 - 3x^2 + 1, \quad x^3 - \sin x, \quad |x| + x, \quad \ln \frac{1-x}{1+x} \ \ (|x| < 1), \quad \frac{1}{2^x - 1} + \frac{1}{2} \ \ (x \neq 0).$$

(b) $f(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2} + \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$ ayrışımını kullanarak aşağıdaki fonksiyonları bir çift ve bir tek fonksiyonun toplamı olarak yazınız:

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}, \qquad g(x) = \frac{1}{x-1} \ \ (x \neq \pm 1), \qquad h(x) = 2^x.$$

SORU 75

Simetrik bir A kümesi üzerinde tanımlı fonksiyonlar için aşağıdakileri ispatlayınız:

(a) İki çift fonksiyonun toplamı çifttir; iki tek fonksiyonun toplamı tektir.

(b) İki tek fonksiyonun çarpımı çifttir; bir çift ile bir tek fonksiyonun çarpımı tektir.

(c) ($g(A) \subset A$ olmak üzere) g çift ise $f \circ g$ çifttir; f ve g tek ise $f \circ g$ tektir; f çift ve g tek ise $f \circ g$ çifttir.

(d) f tek ve $0 \in A$ ise $f(0) = 0$ dır.

(e) Hem tek hem de çift olan bir fonksiyon, sıfır fonksiyonudur.

© Dr Metin Turgay

2.3 PARÇALI TANIMLI FONKSİYONLAR

SORU 76

Aşağıdaki fonksiyonları mutlak değer kullanmadan parçalı biçimde yazınız, grafiklerini çiziniz ve görüntü kümelerini belirleyiniz:

(a) $f(x) = |x+1| - |x-2|$ (b) $f(x) = |x^2 - 4|$

(c) $f(x) = x + |x|$ (d) $f(x) = |2x-1| + |x+3|$

SORU 77

(a) $f(x) = \operatorname{sgn}(x^2 - 3x + 2)$ fonksiyonunu parçalı biçimde yazıp grafiğini çiziniz.

(b) $f(x) = \operatorname{sgn}(\sin x)$ fonksiyonunun $[-2\pi, 2\pi]$ aralığındaki grafiğini çiziniz.

(c) $\operatorname{sgn}(x^2 - 1) = \operatorname{sgn}(x)$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

(d) Her $x, y \in R$ için $\operatorname{sgn}(xy) = \operatorname{sgn}(x)\operatorname{sgn}(y)$ ve $|x| = x\operatorname{sgn}(x)$ olduğunu ispatlayınız.

(e) $f(x) = (x-1)\operatorname{sgn}(x-1)$ ve $g(x) = x^2\operatorname{sgn}(x)$ fonksiyonlarını signum kullanmadan yazınız.

SORU 78

Aşağıdaki fonksiyonların belirtilen aralıklardaki grafiklerini çiziniz:

(a) $f(x) = [\![2x]\!]$, $[-1, 2)$ (b) $f(x) = x - [\![x]\!]$, $[-2, 2)$

(c) $f(x) = [\![x]\!] + [\![-x]\!]$, $[-2, 2]$ (d) $f(x) = [\![x^2]\!]$, $[0, 2)$

(e) $f(x) = (-1)^{[\![x]\!]}$, $[-2, 3)$ (f) $f(x) = x[\![x]\!]$, $[-2, 2)$

SORU 79

$f : R \to R$, $f(x) = x - [\![x]\!]$ (kesir kısmı fonksiyonu) veriliyor.

(a) Her $x \in R$ için $f(x+1) = f(x)$ olduğunu ve $f(R) = [0, 1)$ olduğunu gösteriniz.

(b) f nin her $[n, n+1)$ $(n \in Z)$ aralığında artan olduğunu fakat R üzerinde monoton olmadığını gösteriniz.

(c) $f(x) = \dfrac{x}{3}$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

(d) $f(2x) = f(x)$ denkleminin çözüm kümesinin Z olduğunu ispatlayınız.

SORU 80

(a) $f(x) = \max\{x, x^2\}$ ve $g(x) = \min\{1, |x|\}$ fonksiyonlarını parçalı biçimde yazıp grafiklerini çiziniz.

(b) $\max\{a, b\} = \dfrac{a + b + |a - b|}{2}$ formülünü kullanarak $h(x) = \max\{2x,\, 3 - x\}$ fonksiyonunu mutlak değer yardımıyla tek bir ifade olarak yazınız ve grafiğini çiziniz.

© Dr. Metin Turgay

SORU 81

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ rasyonel ise} \\ 0, & x \text{ irrasyonel ise} \end{cases}$$

fonksiyonunu (Dirichlet fonksiyonu) göz önüne alalım.

(a) Her $x \in R$ için $D(D(x)) = 1$ olduğunu gösteriniz.

(b) Her $q \in Q$ ve her $x \in R$ için $D(x+q) = D(x)$ olduğunu gösteriniz. Buradan D nin en küçük pozitif periyodunun bulunmadığı sonucuna varınız.

(c) D nin hiçbir (a, b) aralığında monoton olmadığını ispatlayınız. Buradan D nin parçalı monoton olmadığını çıkarınız. (*Rasyonel ve irrasyonel sayıların yoğunluğunu kullanınız.*)

2.4 POLİNOMLAR VE RASYONEL FONKSİYONLAR

SORU 82

(a) Her $x \in R$ için $x^2 + 3x - 1 = a(x-1)^2 + b(x-1) + c$ olacak biçimdeki a, b, c sayılarını bulunuz.

(b) $P(x) = x^3 - 2x^2 + ax + b$ polinomu $(x-1)$ ve $(x+2)$ ile tam bölünüyorsa a ve b yi bulunuz; $P(x)$ i çarpanlarına ayırınız.

(c) $P(0) = 1$, $P(1) = 2$ ve $P(2) = 7$ koşullarını sağlayan ve derecesi en fazla 2 olan $P(x)$ polinomunu bulunuz.

SORU 83

Polinomların eşitliğini kullanarak aşağıdaki eşitlikleri, ifadelerin tanımlı olduğu her x için sağlayan A, B, C sabitlerini bulunuz (basit kesirlere ayırma):

(a) $\dfrac{5x-1}{(x-1)(x+1)} = \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{B}{x+1}$

(b) $\dfrac{2x+3}{x^2+x} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x+1}$

(c) $\dfrac{x^2+1}{x(x-1)^2} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x-1} + \dfrac{C}{(x-1)^2}$

SORU 84

(a) $\text{der}[P(x)] = 3$ ve $\text{der}[Q(x)] = 5$ ise $P+Q$, $P \cdot Q$, $P \circ Q$, $Q \circ P$ ve P^2 polinomlarının derecelerini bulunuz. Genel olarak $\text{der}[P+Q] < \max\{\text{der}\, P, \text{der}\, Q\}$ olabilmesi için ne gerekir? Yukarıdaki dereceler için bu mümkün müdür? Bir örnek veriniz.

(b) Aşağıdaki fonksiyonların en geniş tanım kümelerini bulunuz:

$$\frac{x+2}{x^2-4}, \qquad \frac{1}{x^3-8}, \qquad \frac{x}{x^4+1}, \qquad \frac{1}{x^2-5x+6} + \sqrt{x}.$$

© Dr. Metin Turgay

(c) $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2-4}$ ile $g(x) = \dfrac{1}{x-2}$ fonksiyonları eşit midir? Gerekçelendiriniz.

SORU 85

Bu soruda sıfırdan farklı n-inci dereceden bir polinomun en fazla n kökü olduğu bilgisini kullanabilirsiniz.

(a) P bir polinom olsun. Her $x \in R$ için $P(x+1) - P(x) = 2x + 1$ ve $P(0) = 0$ ise $P(x) = x^2$ olduğunu ispatlayınız. ($Q(x) = P(x) - x^2$ *polinomunun* $Q(n) = Q(0)$ *özelliğini kullanınız.*)

(b) Her $x \in R$ için $P(2x) = 4P(x)$ eşitliğini sağlayan tüm P polinomlarını, katsayıları karşılaştırarak bulunuz.

2.5 TRİGONOMETRİK FONKSİYONLAR VE TERSLERİ

SORU 86

(a) $15°$, $75°$, $210°$, $330°$ açılarını radyana; $\frac{7\pi}{12}$, $\frac{5\pi}{4}$ ve 2 radyanlık açıları dereceye çeviriniz.

(b) Aşağıdaki değerleri hesaplayınız:

$$\sin\frac{7\pi}{6}, \quad \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right), \quad \tan\frac{5\pi}{4}, \quad \cot\frac{11\pi}{6}, \quad \sec\frac{3\pi}{4}, \quad \csc\left(-\frac{\pi}{6}\right).$$

(c) Toplam, fark ve yarım açı formüllerini kullanarak $\sin 15°$, $\cos\frac{5\pi}{12}$, $\tan\frac{\pi}{12}$, $\sin\frac{\pi}{8}$ ve $\tan\frac{3\pi}{8}$ değerlerini kök içeren ifadeler olarak bulunuz.

SORU 87

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

eşitliğini ispatlayınız. Ardından bu eşitlikten $\tan(\alpha - \beta) = \dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$ formülünü elde ediniz.

Yol gösterme: Birim çember üzerindeki $P(\cos\alpha, \sin\alpha)$ ve $Q(\cos\beta, \sin\beta)$ noktaları arasındaki uzaklık, $R(\cos(\alpha-\beta), \sin(\alpha-\beta))$ ile $A(1,0)$ noktaları arasındaki uzaklığa eşittir (neden?). İki uzaklığın karelerini eşitleyiniz.

SORU 88

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ bağıntısından ve toplam–fark formüllerinden yararlanarak aşağıdaki özdeşlikleri ispatlayınız:

(a) $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$ ve $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$,

(b) $\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)]$, $\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)]$, $\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]$,

© Dr. Metin Turgay

(c) $\sin p + \sin q = 2\sin\dfrac{p+q}{2}\cos\dfrac{p-q}{2}$ ve $\cos p - \cos q = -2\sin\dfrac{p+q}{2}\sin\dfrac{p-q}{2}$,

(d) $\tan\dfrac{x}{2} = \dfrac{\sin x}{1+\cos x} = \dfrac{1-\cos x}{\sin x}$ (ifadelerin tanımlı olduğu x ler için),

(e) $1+\tan^2 x = \sec^2 x$ ve $1+\cot^2 x = \csc^2 x$.

SORU 89

Aşağıdaki denklemlerin $[0, 2\pi)$ aralığındaki çözümlerini bulunuz:

(a) $2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$

(b) $\cos 2x = \cos x$

(c) $\sin x + \cos x = 1$

(d) $\tan x = 2\sin x$

(e) $\sin 2x = \cos x$

(f) $\cos^2 x - \sin^2 x = \frac{1}{2}$

SORU 90

Tanım kümesindeki her x için ($x+T$ de tanım kümesine ait olmak üzere) $f(x+T) = f(x)$ eşitliğini sağlayan $T > 0$ sayısına f nin bir *periyodu*, en küçük pozitif periyoda da f nin *esas periyodu* denir.

(a) T, f nin bir periyodu ve $a \neq 0$ ise $T/|a|$ sayısının $g(x) = f(ax+b)$ fonksiyonunun bir periyodu olduğunu gösteriniz.

(b) Aşağıdaki fonksiyonların esas periyotlarını bulunuz:

$$\sin 3x, \quad \cos\frac{x}{2}, \quad \tan 2x, \quad |\sin x|, \quad \sin^2 x, \quad \sin x + \cos 2x, \quad \sin 2x + \tan 3x.$$

SORU 91

Esas aralıkları kullanarak aşağıdaki değerleri bulunuz:

(a) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$, $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\arctan(-\sqrt{3})$, $\operatorname{arccot}(-1)$, $\arcsin 1$, $\arccos(-1)$,

(b) $\arcsin\left(\sin\frac{5\pi}{6}\right)$, $\arccos\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$, $\arctan\left(\tan\frac{3\pi}{4}\right)$, $\arcsin(\sin 3)$, $\arccos(\cos 4)$.

SORU 92

(a) $x \in [-1, 1]$ için $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$ olduğunu; $x \in R$ için $\sin(2\arctan x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$ olduğunu gösteriniz. $\tan(\arccos x)$ ifadesini x cinsinden yazınız ($x \neq 0$).

(b) Aşağıdaki değerleri hesaplayınız:

$$\cos\left(\arctan\frac{3}{4} + \arcsin\frac{5}{13}\right), \qquad \sin\left(\arccos\frac{1}{3} - \arcsin\frac{1}{3}\right),$$

$$\tan\left(\arcsin\frac{3}{5} + \arccos\frac{5}{13}\right).$$

© Dr. Metin Turgay

SORU 93

Aşağıdaki özdeşlikleri ispatlayınız:

(a) $x \in [-1,1]$ için $\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}$,

(b) $x > 0$ için $\arctan x + \arctan \dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2}$; $x < 0$ için $\arctan x + \arctan \dfrac{1}{x} = -\dfrac{\pi}{2}$,

(c) $x \in [-1,1]$ için $\arcsin(-x) = -\arcsin x$ ve $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$,

(d) $\arctan \dfrac{1}{2} + \arctan \dfrac{1}{3} = \dfrac{\pi}{4}$ ve $2\arctan \dfrac{1}{3} + \arctan \dfrac{1}{7} = \dfrac{\pi}{4}$.

SORU 94

(a) Aşağıdaki fonksiyonların en geniş tanım kümelerini bulunuz:

$$\arcsin \frac{x-1}{2}, \qquad \arccos(x^2-1), \qquad \sqrt{\arcsin x},$$
$$\arcsin(2x) + \arccos(x-1), \qquad \frac{1}{\arctan x}.$$

(b) $f(x) = 2\arcsin x + \dfrac{\pi}{2}$ ve $g(x) = \arctan(x^2)$ fonksiyonlarının görüntü kümelerini bulunuz.

(c) $f : \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \to [-1,1]$, $f(x) = \sin x$ fonksiyonunun birebir örten olduğunu kabul ederek $f^{-1}(x)$ i $\arcsin x$ cinsinden ifade ediniz.

2.6 ÜSTEL, LOGARİTMİK VE HİPERBOLİK FONKSİYONLAR

SORU 95

(a) Hesaplayınız: $\log_2 32$, $\log_3 \frac{1}{81}$, $\log_{1/2} 8$, $\log_{\sqrt{2}} 4$, $\ln e^5$, $e^{\ln 7}$, $10^{2\log_{10} 3}$.

(b) Sadeleştiriniz: $\log_2 6 - \log_2 3 + \log_2 4$, $2\log_3 6 - \log_3 4$, $\log_4 9 \cdot \log_3 16$, $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdots \log_{63} 64$.

SORU 96

Aşağıdaki denklemleri çözünüz:

(a) $4^x - 3 \cdot 2^{x+1} + 8 = 0$

(b) $\log_2(x-1) + \log_2(x+1) = 3$

(c) $\log_x 4 + \log_4 x = \frac{5}{2}$

(d) $3^{2x} - 3^{x+1} - 4 = 0$

(e) $e^x - e^{-x} = 2$

(f) $\ln(x+2) - \ln x = \ln 3$

SORU 97

(a) Aşağıdaki fonksiyonların en geniş tanım kümelerini bulunuz:

$$\ln(x^2-4x+3), \quad \log_x(4-x), \quad \sqrt{\ln(x-1)}, \quad \ln(\ln x), \quad \frac{1}{e^x - 1}, \quad \log_2(\sin x).$$

© Dr. Metin Turgay

(b) $f(x) = \ln(1+x^2)$ ve $g(x) = 2^{-x^2}$ fonksiyonlarının görüntü kümelerini bulunuz.

(c) $f : R \to (0,\infty)$, $f(x) = e^{2x+1}$ ve $g : (1,\infty) \to R$, $g(x) = \ln(x-1)$ fonksiyonlarının terslerini bulunuz.

SORU 98

$a, b > 0$, $a \neq 1$, $b \neq 1$ olsun. Üslü sayıların $a^{x+y} = a^x a^y$ ve $(a^x)^y = a^{xy}$ özelliklerini ve $y = \log_a x \iff x = a^y$ tanımını kullanarak aşağıdakileri ispatlayınız:

(a) $x, t > 0$ için $\log_a(xt) = \log_a x + \log_a t$ ve $\log_a \dfrac{x}{t} = \log_a x - \log_a t$,

(b) $x > 0$, $n \in R$ için $\log_a x^n = n \log_a x$,

(c) $x > 0$ için $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$ (taban değiştirme); özel olarak $x \neq 1$ ise $\log_a x = \dfrac{1}{\log_x a}$,

(d) $a > 1$ ise $\log_a$ fonksiyonunun $(0,\infty)$ üzerinde artan olduğunu (a^x in artan olduğunu kabul ederek) gösteriniz.

SORU 99

(a) $\log_2 3$ sayısının irrasyonel olduğunu ispatlayınız.

(b) (a) yı ve Soru 15 sonucunu kullanarak $\log_4 12$ sayısının irrasyonel olduğunu gösteriniz.

(c) $n \in N$ için $\log_2 n$ sayısının rasyonel olması için gerek ve yeter şartın, $k \geq 0$ bir tam sayı olmak üzere $n = 2^k$ olması olduğunu gösteriniz.

SORU 100

Hiperbolik fonksiyonların tanımlarını kullanarak aşağıdaki özdeşlikleri ispatlayınız:

(a) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$, $\cosh(-x) = \cosh x$, $\sinh(-x) = -\sinh x$,

(b) $\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$ ve $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$,

(c) $\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x$,

(d) $1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x$ ve $\coth^2 x - 1 = \operatorname{csch}^2 x$ $(x \neq 0)$,

(e) $\tanh(x+y) = \dfrac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \tanh y}$,

(f) $(\cosh x + \sinh x)^n = \cosh nx + \sinh nx$ $(n \in N)$.

SORU 101

(a) $\sinh x = \dfrac{3}{4}$ ise $\cosh x$, $\tanh x$ ve x değerlerini bulunuz.

© Dr. Metin Turgay

(b) $\cosh x = \dfrac{5}{4}$ denklemini çözünüz.

(c) cosh fonksiyonunun görüntü kümesinin $[1, \infty)$, tanh fonksiyonunun görüntü kümesinin $(-1, 1)$ olduğunu gösteriniz.

(d) $\sinh : R \to R$ fonksiyonunun birebir örten olduğunu gösteriniz ve tersinin $\operatorname{arsinh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$ olduğunu gösteriniz.

(e) $\cosh : [0, \infty) \to [1, \infty)$ ve $\tanh : R \to (-1, 1)$ fonksiyonlarının terslerinin sırasıyla $\operatorname{arcosh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$ ve $\operatorname{artanh} x = \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{1+x}{1-x}$ olduğunu gösteriniz.

SORU 102

$f : R \to R$ fonksiyonu her $x, y \in R$ için $f(x+y) = f(x)f(y)$ eşitliğini sağlasın ve f sıfır fonksiyonu olmasın. (Örneğin $f(x) = a^x$ üstel fonksiyonu bu özelliğe sahiptir.)

(a) $f(0) = 1$ ve her x için $f(x) > 0$ olduğunu ispatlayınız. ($f(x) = f(x/2)^2$ *yazınız.*)

(b) Her $x \in R$ için $f(-x) = \dfrac{1}{f(x)}$ ve her $n \in N$ için $f(nx) = f(x)^n$ olduğunu gösteriniz.

(c) $f(1) = a$ ise her $r \in Q$ için $f(r) = a^r$ olduğunu ispatlayınız.

2.7 EĞRİLERİN PARAMETRİK GÖSTERİMİ

SORU 103

Aşağıdaki parametrik denklemlerde parametreyi yok ederek eğrilerin kartezyen denklemlerini bulunuz ve eğrileri tanıyınız. Parametre aralığı kapalı olan şıklarda başlangıç ve bitiş noktalarını, tüm şıklarda çizim yönünü gösteriniz.

(a) $x = 2t + 1,\ \ y = 3 - t,\ \ t \in [0, 2]$

(b) $x = 3\cos t,\ \ y = 2\sin t,\ \ t \in [0, 2\pi]$

(c) $x = 1 + 2\cos t,\ \ y = -1 + 2\sin t,\ \ t \in [0, \pi]$

(d) $x = t^2,\ \ y = t^3,\ \ t \in R$

(e) $x = \cosh t,\ \ y = \sinh t,\ \ t \in R$

(f) $x = \sec t,\ \ y = \tan t,\ \ t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ((e) ile karşılaştırınız)

SORU 104

Aşağıdaki eğriler için birer parametrik gösterim bulunuz:

(a) $A(1, 2)$ noktasından $B(4, -1)$ noktasına giden doğru parçası,

(b) merkezi (a, b), yarıçapı r olan ve *saat yönünde* bir kez dolanılan çember,

© Dr. Metin Turgay

(c) $y = x^2 - 2x$ parabolü,

(d) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ elipsi,

(e) herhangi bir $y = f(x)$, $x \in [a, b]$ fonksiyonunun grafiği.

SORU 105

Yarıçapı a olan bir tekerleğin x-ekseni üzerinde kaymadan yuvarlanmasıyla, tekerlek üzerindeki sabit bir noktanın çizdiği sikloid eğrisinin parametrik denklemleri $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ dir.

(a) $a = 1$ için $t = \frac{\pi}{2},\ \pi,\ \frac{3\pi}{2},\ 2\pi$ değerlerine karşılık gelen noktaları bulup bir kemerin taslağını çiziniz.

(b) Sikloidin x-eksenine değdiği noktaları ve y nin alabileceği en büyük değeri bulunuz.

(c) $t \in [0, 2\pi]$ için çizilen kemerin $x = \pi a$ doğrusuna göre simetrik olduğunu gösteriniz. (*t ve $2\pi - t$ parametre değerlerine karşılık gelen noktaları karşılaştırınız.*)

SORU 106

(a) $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ $(a > 0)$ parametrik denklemleriyle verilen eğrinin (astroid) kapalı denkleminin $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{a^2}$ olduğunu gösteriniz.

(b) $x = \dfrac{3t}{1+t^3}$, $y = \dfrac{3t^2}{1+t^3}$ $(t \neq -1)$ noktalarının $x^3 + y^3 = 3xy$ kapalı denklemini sağladığını gösteriniz.

(c) Aşağıdaki kapalı denklemlerden y yi (mümkünse) x in açık fonksiyonu olarak yazınız ve tanım kümesini belirleyiniz. Hangisi tek bir açık fonksiyon belirtmez?

$$xy + y - 2x = 1, \qquad e^y - x = 0, \qquad x - y^3 - 1 = 0, \qquad x^2 + y^2 = 4.$$

© Dr. Metin Turgay

3 LİMİT

3.1 DİZİLER, SINIRLILIK VE LİMİT TANIMI

SORU 107

(a) Genel terimleri verilen aşağıdaki dizilerin ilk beş terimini yazınız:

$$s_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}, \qquad t_n = \frac{n!}{n^n}, \qquad u_n = \cos\frac{n\pi}{3}.$$

(b) İlk birkaç terimi verilen aşağıdaki diziler için birer genel terim yazınız:

$$\frac{1}{2},\ -\frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ -\frac{4}{5},\ \ldots; \qquad 2,\ 5,\ 10,\ 17,\ 26,\ \ldots;$$
$$1,\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{7},\ \ldots; \qquad 0,\ 1,\ 0,\ 1,\ \ldots$$

(c) İlk dört terimi $1, 2, 3, 4$ ve beşinci terimi 120 olan bir dizinin genel terimini yazınız. Bu örnek, bir dizinin yalnızca ilk birkaç terimi verilerek belirlenemeyeceğini nasıl gösterir?

SORU 108

Aşağıdaki dizilerin alttan veya üstten sınırlı olup olmadığını belirleyiniz; varsa supremum ve infimumlarını bulunuz ve bu değerlerin dizinin bir terimi olup olmadığını belirtiniz:

(a) $\dfrac{2n+1}{n+2}$ (b) $(-1)^n\left(1-\dfrac{1}{n}\right)$ (c) n^2-6n

(d) $\dfrac{n}{2^n}$ (e) $\dfrac{n^2+1}{n^2-n+1}$ (f) $\big(1+(-1)^n\big)n$

SORU 109

Limitin ε–n_0 tanımını kullanarak aşağıdaki eşitlikleri ispatlayınız. (a), (b) ve (c) şıkları için $\varepsilon = 0{,}01$ alındığında uygun bir n_0 eşiğini açıkça belirleyiniz.

(a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+1}{n+2}=3$ (b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-1}{2n^2+3}=\dfrac{1}{2}$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}=0$ (d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=0$

(e) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+\sin n}{n+1}=1$ (f) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^2+1}=0$

SORU 110

Limitin tanımını ve uygun eşitsizlikleri kullanarak aşağıdaki limitleri ispatlayınız:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}=1$. ($\sqrt[n]{2}=1+h_n$, $h_n>0$ *yazıp Bernoulli eşitsizliğinden* $h_n\le\frac{1}{n}$ *olduğunu gösteriniz.*)

© Dr. Metin Turgay

(b) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n}{2^n} = 0$. ($n \geq 2$ *için binom formülünden* $2^n = (1+1)^n \geq \frac{n(n-1)}{2}$ *olduğunu kullanınız.*)

(c) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. ($n \geq 2$ *için* $\sqrt[n]{n} = 1 + h_n$ *yazıp* $n = (1+h_n)^n \geq \frac{n(n-1)}{2} h_n^2$ *eşitsizliğinden* $h_n \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}}$ *olduğunu gösteriniz.*)

(d) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n^2+n}{n^2-3} = 1$.

SORU 111

(a) $s_n = (-1)^n$ dizisinin hiçbir $s \in R$ sayısına yakınsamadığını limit tanımını kullanarak ispatlayınız.

(b) $s_n = n$ dizisinin yakınsak olmadığını ispatlayınız.

(c) $(s_n) \to s$ ise $(|s_n|) \to |s|$ olduğunu ispatlayınız. Bu önermenin karşıtının doğru olmadığını bir örnekle gösteriniz. Ancak $(s_n) \to 0 \iff (|s_n|) \to 0$ olduğunu ispatlayınız.

SORU 112

(s_n) reel terimli bir dizi olsun.

(a) Bir dizinin sonlu sayıda teriminin değiştirilmesinin dizinin yakınsaklığını ve limitini etkilemediğini ispatlayınız.

(b) Sabit bir $k \in N$ için $\lim s_n = s \iff \lim s_{n+k} = s$ olduğunu ispatlayınız.

(c) $\lim s_n = s > 0$ ise bir $n_0 \in N$ bulunduğunu ve her $n > n_0$ için $s_n > \dfrac{s}{2} > 0$ olduğunu ispatlayınız.

(d) Her n için $s_n \geq 0$ ve $(s_n) \to s$ ise $s \geq 0$ ve $(\sqrt{s_n}) \to \sqrt{s}$ olduğunu ispatlayınız. ($s > 0$ *ve* $s = 0$ *durumlarını ayrı inceleyiniz.*)

SORU 113

(a) $|r| < 1$ ise $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$ olduğunu ispatlayınız. ($r \neq 0$ *için* $\frac{1}{|r|} = 1 + h$, $h > 0$ *yazıp Bernoulli eşitsizliğini kullanınız.*)

(b) $r = 1, r = -1, r > 1$ ve $r < -1$ durumlarında (r^n) dizisinin davranışını inceleyiniz.

(c) Aşağıdaki limitleri hesaplayınız:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n + 3^n}{3^{n+1} - 2^n}, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{5 \cdot 4^n - 3^n}{4^{n+1} + 2^n}, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^n}{2^{n+1}}.$$

© Dr. Metin Turgay

3.2 LİMİT TEOREMLERİ

SORU 114

Limit teoremlerini kullanarak aşağıdaki limitleri hesaplayınız:

(a) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{3n^2-2n+1}{5n^2+4}$

(b) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{2n^3+n}{n^4+1}$

(c) $\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+n}-n\right)$

(d) $\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{4n^2+3n}-2n\right)$

(e) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2}$

(f) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3}$

(g) $\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[3]{n^3+n^2}-n\right)$

(h) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{(2n+1)^3}{(n+1)(4n^2+5)}$

SORU 115

Aşağıdaki limitleri hesaplayınız:

(a) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n}$

(b) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{2^n+5^n}{5^{n+1}+3^n}$

(c) $\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$

(d) $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k(k+1)}$

(e) $\lim_{n\to\infty} \prod_{k=2}^{n} \left(1-\dfrac{1}{k^2}\right)$

(f) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+2)!-(n+1)!}$

SORU 116

$(s_n) \to s$ ve $(t_n) \to t$ olsun. Toplamın, çarpımın ve bölümün limitine ilişkin bilinen sonuçları kullanarak veya doğrudan ε–n_0 tanımıyla aşağıdakileri ispatlayınız:

(a) $(s_n - t_n) \to s - t$,

(b) her n için $t_n \neq 0$ ve $t \neq 0$ ise $\left(\dfrac{s_n}{t_n}\right) \to \dfrac{s}{t}$,

(c) her $k \in N$ için $(s_n^k) \to s^k$ (k üzerinden tümevarımla),

(d) $p(x) = a_m x^m + \cdots + a_1 x + a_0$ bir polinom ise $\big(p(s_n)\big) \to p(s)$.

SORU 117

Aşağıdaki her bir durum için bir örnek veriniz ve örneğinizin istenen özelliklere sahip olduğunu ispatlayınız:

(a) Toplamları yakınsak olan iki ıraksak dizi,

(b) çarpımları yakınsak olan iki ıraksak dizi,

(c) sınırlı fakat ıraksak bir dizi ("yakınsak her dizi sınırlıdır" önermesinin karşıtının doğru olmadığını gösterir),

© Dr. Metin Turgay

(d) $(s_n) \to 0$ olduğu hâlde $(s_n t_n)$ dizisi 0 a yakınsamayan diziler,

(e) $\left(\frac{s_n}{t_n}\right) \to 1$ olduğu hâlde $(s_n - t_n)$ dizisi 0 a yakınsamayan diziler.

SORU 118

$(s_n) \to s$ ve $(t_n) \to t$ olsun.

(a) Belli bir n_0 indisinden sonra $s_n \leq t_n$ ise $s \leq t$ olduğunu ispatlayınız.

(b) Her n için $s_n < t_n$ olduğu hâlde $s = t$ olan bir örnek veriniz; yani limite geçişte kesin eşitsizliğin korunmadığını gösteriniz.

(c) Her n için $a \leq s_n \leq b$ ise $a \leq s \leq b$ olduğunu gösteriniz.

SORU 119

$(s_n) \to s$, $s \neq 0$ ve her n için $s_n \neq 0$ olsun. Bu soruda $\left(\frac{1}{s_n}\right) \to \frac{1}{s}$ olduğu, $s > 0$ ve $s < 0$ durumları ayrılmadan ispatlanacaktır.

(a) Bir $n_0 \in N$ bulunduğunu ve her $n > n_0$ için $|s_n| > \dfrac{|s|}{2}$ olduğunu ispatlayınız.

(b) (a) yı kullanarak her $n > n_0$ için $\left|\dfrac{1}{s_n} - \dfrac{1}{s}\right| \leq \dfrac{2}{|s|^2}|s_n - s|$ olduğunu gösteriniz ve buradan $\left(\dfrac{1}{s_n}\right) \to \dfrac{1}{s}$ sonucunu çıkarınız.

3.3 MONOTON DİZİLER

SORU 120

Aşağıdaki dizilerin monoton artan, azalmayan, monoton azalan veya artmayan olup olmadığını $s_{n+1} - s_n$ farkını veya (pozitif terimli dizilerde) $\dfrac{s_{n+1}}{s_n}$ oranını inceleyerek belirleyiniz:

(a) $\dfrac{n}{n+1}$ (b) $\dfrac{n+1}{2n-1}$ (c) $\dfrac{n}{2^n}$

(d) $\dfrac{n!}{n^n}$ (e) $\dfrac{2^n}{n!}$ (f) $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

(g) $\dfrac{(-1)^n}{n}$ (h) $\dfrac{3^n}{n^3}$ (i) $\dfrac{n^2}{n^2+1}$

SORU 121

Monoton yakınsaklık teoremini kullanarak aşağıdaki dizilerin yakınsak olduğunu ispatlayınız:

(a) $s_n = 1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \cdots + \dfrac{1}{n^2}$ (bkz. Soru 20 (d)),

© Dr. Metin Turgay

(b) $s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ (bkz. Soru 27 (b)),

(c) $s_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$ (dizinin artan olduğunu ve her n için $\frac{1}{2} \leq s_n < 1$ olduğunu gösteriniz).

SORU 122

$e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ve $f_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ dizilerini göz önüne alalım.

(a) $\frac{e_{n+1}}{e_n} = \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \frac{n+1}{n}$ olduğunu gösteriniz ve kesin Bernoulli eşitsizliğini (Soru 21 (a)) kullanarak (e_n) dizisinin monoton artan olduğunu ispatlayınız.

(b) Soru 27 sonucunu kullanarak (e_n) dizisinin yakınsak olduğunu gösteriniz. Bu dizinin limitine e sayısı denir.

(c) (f_n) dizisinin monoton azalan olduğunu ve her n için $e_n < e < f_n$ olduğunu ispatlayınız. f_5 değerini kullanarak $2 < e < 3$ olduğunu gösteriniz.

(d) Aşağıdaki limitleri e cinsinden bulunuz:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n}, \quad \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n},$$
$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n+5}\right)^{n}, \quad \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{n}.$$

SORU 123

(a) Monoton artan ve üstten sınırlı olmayan bir dizinin $+\infty$ a ıraksadığını ispatlayınız.

(b) Monoton azalan ve alttan sınırlı bir dizinin, terimlerinin kümesinin infimumuna yakınsadığını ispatlayınız.

(c) Monoton bir dizinin yakınsak bir alt dizisi varsa dizinin kendisinin de yakınsak olduğunu ispatlayınız.

SORU 124

Aşağıdaki limitleri, dizinin belli bir indisten sonra monoton ve sınırlı olduğunu göstererek ve ardışık terimler arasındaki bağıntıda limite geçerek ispatlayınız:

(a) $a > 0$ için $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$,

(b) $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$,

© Dr. Metin Turgay

(c) $k \in N$ için $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^k}{2^n} = 0$.

Yol gösterme: (a) için $s_n = \frac{a^n}{n!}$ ise $s_{n+1} = \frac{a}{n+1} s_n$ dir. $n+1 > a$ olduğunda dizi azalandır ve alttan 0 ile sınırlıdır; $\lim s_n = L$ deyip bu bağıntıda limite geçiniz.

SORU 125

(*İç içe aralıklar teoremi*) Her $n \in N$ için $I_n = [a_n, b_n]$ kapalı aralıkları $I_{n+1} \subset I_n$ koşulunu sağlasın ve $\lim\limits_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0$ olsun.

(a) (a_n) dizisinin azalmayan, (b_n) dizisinin artmayan olduğunu ve her n, m için $a_n \leq b_m$ olduğunu gösteriniz.

(b) Monoton yakınsaklık teoremini kullanarak $\bigcap\limits_{n\in N} I_n$ kümesinin tek bir noktadan oluştuğunu ispatlayınız.

(c) Aralıklar açık alınırsa sonucun geçerli olmadığını $I_n = \left(0, \frac{1}{n}\right)$ örneğiyle; aralıklar sınırsız alınırsa geçerli olmadığını $I_n = [n, \infty)$ örneğiyle gösteriniz.

3.4 SIKIŞTIRMA VE STOLZ TEOREMLERİ

SORU 126

Sıkıştırma (sandviç) teoremini kullanarak aşağıdaki limitleri hesaplayınız:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin n}{n}$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n + \cos n}{n^2 + 1}$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n n}{n^2 + 1}$

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{[\![\sqrt{n}]\!]}{\sqrt{n}}$

(e) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n}$

(f) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\cos(n!)}{\sqrt{n}}$

SORU 127

Uygun alt ve üst diziler bularak aşağıdaki limitleri hesaplayınız:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right)$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n}{n^2+1} + \dfrac{n}{n^2+2} + \cdots + \dfrac{n}{n^2+n} \right)$

(c) $x \in R$ olmak üzere $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{[\![nx]\!]}{n}$

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n + 5^n + 7^n}$

© Dr. Metin Turgay

SORU 128

Pozitif terimli bir (a_n) dizisi için $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=r$ ise $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=r$ olduğunu kullanarak aşağıdaki limitleri hesaplayınız. Gerekli yerlerde Soru 122 sonucunu kullanabilirsiniz.

(a) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^2+1}$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\binom{2n}{n}}$

(d) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{n^n}{n!}}$

SORU 129

Stolz teoremini kullanarak aşağıdaki limitleri hesaplayınız:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2}$ (sonucu Soru 114 (e) ile karşılaştırınız),

(b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1\cdot 2+2\cdot 3+\cdots+n(n+1)}{n^3}$,

(c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$,

(d) $k\in N$ olmak üzere $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^k+2^k+\cdots+n^k}{n^{k+1}}$.

SORU 130

(*Aritmetik ortalama limiti*) $(a_n)\to a$ ve $\sigma_n=\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$ olsun. Bu soruda Stolz teoremini kullanmadan $(\sigma_n)\to a$ olduğu ispatlanacaktır.

(a) Önce $a=0$ durumunu ele alınız: verilen $\varepsilon>0$ için $n>n_1$ iken $|a_n|<\frac{\varepsilon}{2}$ olacak biçimde n_1 seçip toplamı n_1 inci terimde ikiye ayırarak $|\sigma_n|<\varepsilon$ olduğunu yeterince büyük n ler için gösteriniz.

(b) a_n-a dizisine (a) yı uygulayarak genel durumu ispatlayınız.

(c) Karşıt önermenin doğru olmadığını gösteriniz: $a_n=(-1)^n$ dizisi ıraksak olduğu hâlde (σ_n) dizisinin yakınsak olduğunu gösteriniz.

SORU 131

$(a_n)\to a$ ise $\left(\dfrac{a_1+\cdots+a_n}{n}\right)\to a$ (aritmetik ortalama limiti) ve terimleri pozitif olan $(a_n)\to a$ için $\left(\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\right)\to a$ (geometrik ortalama limiti) sonuçlarını kullanarak aşağıdaki limitleri hesaplayınız:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}\right)$

© Dr. Metin Turgay

(b) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n}$

(c) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\dfrac{2}{1}\right)^1 \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 \left(\dfrac{4}{3}\right)^3 \cdots \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n}$ (bkz. Soru 122)

(d) (c) deki çarpımı sadeleştirerek $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{\sqrt[n]{n!}}$ limitini bulunuz ve sonucu Soru 128 (b) ile karşılaştırınız.

SORU 132

$(a_n) \to 0$ ve her n için $a_n > 0$ ise $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\sin a_n}{a_n} = 1$ olduğunu kullanarak aşağıdaki limitleri hesaplayınız:

(a) $\lim_{n\to\infty} n \sin \dfrac{1}{n}$

(b) $\lim_{n\to\infty} n^2 \left(1 - \cos \dfrac{1}{n}\right)$

(c) $\lim_{n\to\infty} n \tan \dfrac{\pi}{n}$ $(n \geq 3)$

(d) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\sin(3/n)}{\sin(2/n)}$

Ayrıca $n \geq 3$ için birim çembere *dışarıdan* çizilen düzgün n-genin çevresinin $P_n = 2n \tan \frac{\pi}{n}$, birim çemberin *içine* çizilen düzgün n-genin alanının $A_n = \frac{n}{2} \sin \frac{2\pi}{n}$ olduğunu gösterip $\lim P_n$ ve $\lim A_n$ değerlerini bulunuz.

SORU 133

(a) Her $x \in R$ için $|\sin x| \leq |x|$ olduğunu gösteriniz. ($0 < x < \frac{\pi}{2}$ *için birim çemberde merkez açısı* x *radyan olan daire diliminin alanını* ($\frac{x}{2}$)*, bu dilimin içinde kalan üçgenin alanıyla* ($\frac{1}{2}\sin x$) *karşılaştırınız;* $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ *için sinüsün tek fonksiyon olduğunu,* $|x| \geq \frac{\pi}{2}$ *için* $|\sin x| \leq 1 < |x|$ *olduğunu kullanınız.*)

(b) Her $x \in R$ için $0 \leq 1 - \cos x \leq \dfrac{x^2}{2}$ olduğunu gösteriniz. ($1 - \cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2}$)

(c) $(a_n) \to 0$ ise $(\sin a_n) \to 0$ ve $(\cos a_n) \to 1$ olduğunu, kosinüsün sürekliliğini kullanmadan, sıkıştırma teoremiyle ispatlayınız.

(d) $(a_n) \to 0$ ve her n için $a_n \neq 0$ ise (terimlerin işareti ne olursa olsun) $\dfrac{\sin a_n}{a_n} \to 1$ ve (yeterince büyük n ler için tanımlı olan) $\dfrac{\tan a_n}{a_n} \to 1$ olduğunu gösteriniz.

© Dr. Metin Turgay

3.5 ALT DİZİLER, BOLZANO–WEIERSTRASS TEOREMİ, ALT VE ÜST LİMİT

SORU 134

$s_n = (-1)^n + \dfrac{1}{n}$ dizisi veriliyor. (s_{2n}), (s_{2n-1}), (s_{3n}), (s_{4n}) ve (s_{n^2}) alt dizilerinin genel terimlerini yazınız; yakınsak olanların limitlerini bulunuz. (s_n) dizisinin ıraksak olduğunu alt diziler yardımıyla gösteriniz.

SORU 135

(a) $(s_{2n}) \to s$ ve $(s_{2n-1}) \to s$ ise $(s_n) \to s$ olduğunu ispatlayınız.

(b) (s_{3n}), (s_{3n+1}) ve (s_{3n+2}) alt dizilerinin üçü de s sayısına yakınsıyorsa $(s_n) \to s$ olduğunu ispatlayınız.

(c) $(s_{2n}) \to a$, $(s_{2n+1}) \to b$ ve $(s_{3n}) \to c$ ise $a = b = c$ olduğunu ve (s_n) dizisinin yakınsak olduğunu ispatlayınız. ((s_{6n}) *ve* (s_{6n+3}) *alt dizilerini inceleyiniz.*)

SORU 136

Aşağıdaki dizilerin limit noktalarının (yığılma noktalarının) kümesini, üst limitini ve alt limitini bulunuz. Hangi dizilerin yakınsak olduğunu belirtiniz. ((c) şıkkı için Soru 122 (d) sonucundan yararlanabilirsiniz.)

(a) $(-1)^n \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$

(b) $\sin \dfrac{n\pi}{3}$

(c) $\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{n}\right)^n$

(d) $\cos \dfrac{2n\pi}{3} + \dfrac{(-1)^n}{n}$

(e) $\dfrac{1 + (-1)^n}{2} + \dfrac{(-1)^n}{n}$

(f) $\dfrac{n^2 \cos(n\pi)}{n^2 + 1}$

SORU 137

$y_n = \sup_{k \geq n} x_k$ ve $z_n = \inf_{k \geq n} x_k$ dizilerini açıkça bularak aşağıdaki dizilerin üst ve alt limitlerini ($\limsup x_n = \lim y_n$, $\liminf x_n = \lim z_n$) hesaplayınız. Üst ve alt limitleri karşılaştırarak dizilerin yakınsak olup olmadığını belirleyiniz.

(a) $x_n = (-1)^n + \dfrac{1}{n}$

(b) $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$

SORU 138

(a) $[a, b]$ aralığındaki her dizinin, limiti $[a, b]$ aralığına ait olan yakınsak bir alt dizisi bulunduğunu ispatlayınız.

(b) $s_n = n$ dizisinin hiçbir yakınsak alt dizisi olmadığını; buna karşılık sınırsız olan $s_n = n^{(-1)^n}$ dizisinin yakınsak bir alt dizisi bulunduğunu gösteriniz. Bolzano–Weierstrass teoremindeki sınırlılık şartı gerek şart mıdır?

(c) Bolzano–Weierstrass teoremini kullanarak sonsuz elemanlı ve sınırlı her $A \subset R$

© Dr. Metin Turgay

kümesinin en az bir yığılma noktası bulunduğunu ispatlayınız. (*A nın birbirinden farklı elemanlarından oluşan bir dizi seçiniz.*)

SORU 139

(s_n) ve (t_n) sınırlı diziler olsun. Aşağıdakileri ispatlayınız:

(a) $\limsup(-s_n) = -\liminf s_n$.

(b) $\limsup(s_n+t_n) \leq \limsup s_n + \limsup t_n$. Eşitsizliğin kesin olabileceğini $s_n = (-1)^n$, $t_n = (-1)^{n+1}$ dizileriyle gösteriniz.

(c) $(t_n) \to t$ ise $\limsup(s_n + t_n) = \limsup s_n + t$.

(d) $1,\ \frac{1}{2},\ 1,\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ 1,\ \frac{1}{4},\ \frac{2}{4},\ \frac{3}{4},\ 1,\ \ldots$ biçiminde (paydası $m = 1, 2, 3, \ldots$ olan $\frac{k}{m}$, $1 \leq k \leq m$, kesirleri sırayla yazılarak) oluşturulan dizinin limit noktalarının kümesinin $[0, 1]$ olduğunu gösteriniz.

SORU 140

Bu soruda Bolzano–Weierstrass teoreminin farklı bir ispatı verilecektir.

(a) Her reel sayı dizisinin azalmayan veya artmayan bir alt dizisi bulunduğunu ispatlayınız.

(b) (a) yı ve monoton yakınsaklık teoremini kullanarak Bolzano–Weierstrass teoremini ispatlayınız.

Yol gösterme: Her $m > n$ için $s_m < s_n$ ise n indisine bir "tepe noktası" diyelim. Sonsuz çoklukta tepe noktası varsa bunlar azalan bir alt dizi verir; sonlu sayıda ise son tepe noktasından sonra azalmayan bir alt dizi kurulabilir.

3.6 CAUCHY DİZİLERİ VE SONSUZA IRAKSAMA

SORU 141

Cauchy dizisi tanımını doğrudan kullanarak aşağıdakileri gösteriniz:

(a) $s_n = \dfrac{1}{n}$ ve $s_n = \dfrac{n+1}{n}$ dizileri Cauchy dizisidir.

(b) $s_n = (-1)^n$ dizisi Cauchy dizisi değildir.

(c) $s_n = \sqrt{n}$ dizisi için $\lim(s_{n+1} - s_n) = 0$ olduğu hâlde (s_n) bir Cauchy dizisi değildir.

SORU 142

$H_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n}$ (harmonik serinin kısmi toplamları) dizisi veriliyor.

(a) Her $n \in N$ için $H_{2n} - H_n \geq \dfrac{1}{2}$ olduğunu gösteriniz. Buradan (H_n) dizisinin bir Cauchy dizisi olmadığını, dolayısıyla ıraksak olduğunu çıkarınız.

© Dr. Metin Turgay

(b) $\lim(H_{n+1} - H_n) = 0$ olduğunu gösteriniz. Bu sonuç, ardışık terimler arasındaki farkın sıfıra gitmesinin bir dizinin Cauchy dizisi olması için yeterli olmadığını nasıl gösterir?

(c) Her $n \in N$ için $H_{2^n} \geq 1 + \dfrac{n}{2}$ olduğunu ispatlayınız ve $\lim H_n = +\infty$ olduğunu gösteriniz.

SORU 143

Aşağıdaki dizilerin Cauchy dizisi, dolayısıyla yakınsak olduğunu ispatlayınız:

(a) $s_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin k}{2^k}$ $\quad$ ($m > n$ *için* $|s_m - s_n| < \frac{1}{2^n}$ *olduğunu gösteriniz*),

(b) $s_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\cos(k!)}{k(k+1)}$,

(c) $s_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ $\quad$ ($k \geq 2$ *için* $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$ *eşitsizliğini kullanınız*).

SORU 144

$0 < c < 1$ olmak üzere (s_n) dizisi her $n \in N$ için

$$|s_{n+2} - s_{n+1}| \leq c\,|s_{n+1} - s_n|$$

koşulunu sağlasın (böyle dizilere *daralan dizi* denir).

(a) Her n için $|s_{n+1} - s_n| \leq c^{n-1}|s_2 - s_1|$ olduğunu gösteriniz.

(b) $m > n$ için $|s_m - s_n| \leq \dfrac{c^{n-1}}{1-c}|s_2 - s_1|$ olduğunu gösteriniz ve (s_n) dizisinin Cauchy dizisi olduğunu ispatlayınız.

(c) $s_1 = 1$ ve $s_{n+1} = \dfrac{1}{1+s_n}$ dizisinin her n için $\frac{1}{2} \leq s_n \leq 1$ koşulunu sağladığını ve $c = \frac{4}{9}$ ile daralan olduğunu gösteriniz. Dizinin limitini bulunuz.

SORU 145

(a) Tanımı kullanarak $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+1}{n+1} = +\infty$ ve $\lim\limits_{n\to\infty}(n - n^3) = -\infty$ olduğunu ispatlayınız.

(b) $(s_n) \to +\infty$ ve (t_n) alttan sınırlı ise $(s_n + t_n) \to +\infty$ olduğunu ispatlayınız.

(c) $(s_n) \to +\infty$ ve $(t_n) \to t > 0$ ise $(s_n t_n) \to +\infty$ olduğunu ispatlayınız.

(d) Pozitif terimli bir (s_n) dizisi için $(s_n) \to +\infty \iff \left(\frac{1}{s_n}\right) \to 0$ olduğunu ispatlayınız. Buradan $\lim \sqrt[n]{n!} = +\infty$ olduğunu gösteriniz. (*Geometrik ortalama limitini*

© Dr. Metin Turgay

$a_k = \frac{1}{k}$ *dizisine uygulayınız.*)

SORU 146

Aşağıdaki dizilerin limitlerini (sonsuz limitler dâhil) bulunuz ya da limitin bulunmadığını gösteriniz:

(a) $n^3 - 100n^2$ (b) $\dfrac{n^2 - n}{n + 5}$ (c) $\dfrac{n!}{2^n}$

(d) $\dfrac{2^n}{n^5}$ (e) $(-1)^n n$ (f) $\sqrt{n^2 + 1} - n$

(e) şıkkındaki dizi için $(|s_n|) \to +\infty$ olduğu hâlde (s_n) dizisinin ne $+\infty$ a ne de $-\infty$ a ıraksadığını gösteriniz.

3.7 TEKRARLAMA BAĞINTISI BULUNAN DİZİLER

SORU 147

Aşağıdaki dizilerin monoton ve sınırlı olduğunu tümevarımla göstererek yakınsak olduklarını ispatlayınız ve limitlerini bulunuz:

(a) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \sqrt{2a_n + 3}$,

(b) $a_1 = 5,\ a_{n+1} = \sqrt{4 + a_n}$,

(c) $a_1 = \sqrt{2},\ a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$ (yani $\sqrt{2},\ \sqrt{2\sqrt{2}},\ \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}},\ \ldots$).

SORU 148

Aşağıdaki dizilerin ilk birkaç terimini hesaplayarak genel terim için bir formül tahmin ediniz, tahmininizi tümevarımla ispatlayınız ve limiti (varsa) bulunuz:

(a) $a_1 = 2,\ a_{n+1} = 2 - \dfrac{1}{a_n}$ (b) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \dfrac{a_n}{1 + a_n}$

(c) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = 2a_n + 1$ (d) $a_1 = 3,\ a_{n+1} = \dfrac{a_n}{2} + 1$

SORU 149

$a_{n+1} = f(a_n)$ biçimindeki bir tekrarlama bağıntısıyla verilen dizide, dizinin yakınsak olduğu gösterilmeden $L = f(L)$ denklemini çözmek yanıltıcı olabilir. Aşağıdaki örneklerin her biri için $L = f(L)$ denkleminin köklerini bulunuz; ardından dizinin gerçek davranışını belirleyerek denklemden elde edilen sonucun neden yanıltıcı olduğunu açıklayınız.

(a) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = 1 - a_n$,

(b) $a_1 = 2,\ a_{n+1} = a_n^2$ ($a_n = 2^{2^{n-1}}$ *olduğunu gösteriniz*),

(c) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = 2a_n + 1$.

© Dr. Metin Turgay

SORU 150

$c \geq 0$ olmak üzere $a_1 = c$ ve $a_{n+1} = \dfrac{a_n^2 + 2}{3}$ dizisi veriliyor.

(a) $L = \dfrac{L^2 + 2}{3}$ denkleminin köklerini bulunuz ve $a_{n+1} - a_n = \dfrac{(a_n - 1)(a_n - 2)}{3}$ olduğunu gösteriniz.

(b) $0 \leq c < 1$ ise dizinin artan ve üstten 1 ile sınırlı olduğunu; $1 < c < 2$ ise azalan ve alttan 1 ile sınırlı olduğunu ispatlayınız. Her iki durumda limiti bulunuz.

(c) $c = 1$ ve $c = 2$ durumlarını inceleyiniz.

(d) $c > 2$ ise dizinin artan olduğunu ve $(a_n) \to +\infty$ olduğunu ispatlayınız.

SORU 151

$a > 0$ ve $x_1 > 0$ olmak üzere $x_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(x_n + \dfrac{a}{x_n}\right)$ dizisi veriliyor (karekök hesabında kullanılan Babil yöntemi).

(a) Her $n \geq 2$ için $x_n \geq \sqrt{a}$ olduğunu ve $(x_n)_{n\geq 2}$ dizisinin artmayan (ayrıca $x_1 \neq \sqrt{a}$ ise monoton azalan) olduğunu gösteriniz; $\lim x_n = \sqrt{a}$ olduğunu ispatlayınız.

(b) $x_{n+1} - \sqrt{a} = \dfrac{(x_n - \sqrt{a})^2}{2x_n}$ olduğunu gösteriniz.

(c) $a = 2$, $x_1 = 1$ için x_2, x_3, x_4 terimlerini kesir olarak hesaplayınız. (b) yi kullanarak $0 < x_4 - \sqrt{2} < 10^{-5}$ olduğunu gösteriniz.

SORU 152

F_n Fibonacci sayıları olmak üzere (bkz. Soru 22) $a_n = \dfrac{F_{n+1}}{F_n}$ dizisinin yakınsak olduğu ve limitinin altın oran olduğu ispatlanacaktır.

(a) Cassini özdeşliğini (Soru 22 (c)) kullanarak $a_{n+1} - a_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{F_n F_{n+1}}$ olduğunu gösteriniz.

(b) Soru 22 (d) deki eşitsizliği kullanarak $|a_{n+1} - a_n| \leq \left(\dfrac{2}{3}\right)^{2n-3}$ olduğunu gösteriniz.

(c) (a_n) dizisinin bir Cauchy dizisi olduğunu ispatlayınız. $a_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{a_n}$ bağıntısını kullanarak limitin $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ olduğunu gösteriniz.

© Dr. Metin Turgay

SORU 153

(*Aritmetik–geometrik ortalama dizileri*) $a > b > 0$ olmak üzere $a_1 = a$, $b_1 = b$ ve

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \qquad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$$

dizileri tanımlanıyor.

(a) Her n için $b_n < b_{n+1} < a_{n+1} < a_n$ olduğunu ispatlayınız.

(b) (a_n) ve (b_n) dizilerinin yakınsak olduğunu gösteriniz.

(c) $a_{n+1} - b_{n+1} \leq \dfrac{a_n - b_n}{2}$ olduğunu gösterip iki dizinin limitinin eşit olduğunu ispatlayınız.

SORU 154

$a_1 = 0$, $a_2 = 1$ ve $n \geq 1$ için $a_{n+2} = \dfrac{a_{n+1} + a_n}{2}$ dizisi veriliyor.

(a) İlk altı terimi hesaplayınız. Dizi monoton mudur?

(b) $d_n = a_{n+1} - a_n$ olmak üzere $d_{n+1} = -\dfrac{1}{2} d_n$ olduğunu gösterip d_n yi bulunuz.

(c) Teleskopik toplam ve geometrik toplam formüllerini kullanarak a_n için kapalı bir formül bulunuz ve $\lim a_n = \dfrac{2}{3}$ olduğunu gösteriniz.

(d) (a_{2n-1}) alt dizisinin artan, (a_{2n}) alt dizisinin azalan olduğunu gösteriniz ve sonucu Soru 135 ile ilişkilendiriniz.

3.8 BİR FONKSİYONUN LİMİTİ

SORU 155

Limitin dizisel tanımını kullanarak, yani a ya yakınsayan, terimleri a dan farklı olan ve fonksiyonun tanım kümesinde bulunan her (x_n) dizisi için $(f(x_n))$ görüntü dizisinin limitini bularak aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

(a) $\lim\limits_{x \to 2} \left(x^2 + 3x - 1\right)$

(b) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}$

(c) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 1}$

(d) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$

Ayrıca $x \neq 2$ için $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ ve $f(2) = 0$ biçiminde tanımlanan $f : R \to R$ fonksiyonu için $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ limitini bulup $f(2)$ değeriyle karşılaştırınız.

Yol gösterme: (d) için $\sqrt{x_n} - 2 = \dfrac{x_n - 4}{\sqrt{x_n} + 2}$ eşitliğini kullanınız; $(x_n) \to 4$ ise $|\sqrt{x_n} - 2| \leq \dfrac{|x_n - 4|}{2}$ olduğundan $(\sqrt{x_n}) \to 2$ dir.

© Dr. Metin Turgay

SORU 156

Uygun diziler seçerek aşağıdaki limitlerin bulunmadığını gösteriniz.

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|x|}{x}$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \sin\dfrac{1}{x}$

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \cos\dfrac{\pi}{x}$

(d) $x \in Q$ için $D(x) = 1$, $x \notin Q$ için $D(x) = 0$ biçiminde tanımlanan Dirichlet fonksiyonunun hiçbir $a \in R$ noktasında limitinin olmadığını gösteriniz.

(e) Buna karşılık $\lim\limits_{x\to 0} x\,D(x) = 0$ olduğunu gösteriniz.

Yol gösterme: (d) için Soru 50 (a) ve (b) şıklarını kullanarak a ya yakınsayan, terimleri a dan farklı bir rasyonel sayı dizisi ve bir irrasyonel sayı dizisi bulunuz.

SORU 157

$A \subset R$, $f, g, h : A \to R$ fonksiyonlar ve a noktası A kümesinin bir yığılma noktası olsun.

(a) Terimleri $A \setminus \{a\}$ kümesinde bulunan ve a ya yakınsayan en az bir (x_n) dizisi bulunduğunu gösteriniz. Buradan $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ limiti varsa tek olduğu sonucunu çıkarınız.

(b) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L > 0$ ise $0 < |x - a| < \delta$ olan her $x \in A$ için $f(x) > 0$ olacak biçimde bir $\delta > 0$ bulunduğunu ispatlayınız.

(c) Her $x \in A\setminus\{a\}$ için $f(x) \le g(x)$ ise ve $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ limitleri varsa $\lim\limits_{x\to a} f(x) \le \lim\limits_{x\to a} g(x)$ olduğunu gösteriniz.

(d) (*Sıkıştırma*) Her $x \in A \setminus \{a\}$ için $f(x) \le g(x) \le h(x)$ ve $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = L$ ise $\lim\limits_{x\to a} g(x) = L$ olduğunu ispatlayınız.

Yol gösterme: (a) için her n için $\left(a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}\right)$ aralığından A nın a dan farklı bir elemanını seçiniz. (b) için olmayana ergi yöntemiyle her n için $0 < |x_n - a| < \frac{1}{n}$ ve $f(x_n) \le 0$ olan bir $x_n \in A$ seçiniz.

SORU 158

$A \subset R$, $f, g : A \to R$ ve a noktası A nın bir yığılma noktası olsun.

(a) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ ve $\lim\limits_{x\to a} g(x) = M$ ise $\lim\limits_{x\to a}(f \cdot g)(x) = LM$ olduğunu; ayrıca her $x \in A$ için $g(x) \neq 0$ ve $M \neq 0$ ise $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}$ olduğunu dizisel tanımla ispatlayınız.

(b) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ ise $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = |L|$ olduğunu gösteriniz. Karşıtının doğru olmadığını bir örnekle gösteriniz.

© Dr. Metin Turgay

(c) 0 noktasında limiti olmayan öyle $f, g : R \to R$ fonksiyonları bulunuz ki $\lim_{x\to 0}(f+g)(x)$ ve $\lim_{x\to 0}(f\cdot g)(x)$ limitleri var olsun.

(d) $\lim_{x\to a} f(x)$ limiti var, $\lim_{x\to a} g(x)$ limiti yok ise $\lim_{x\to a}(f+g)(x)$ limitinin de olmadığını ispatlayınız.

SORU 159

$+\infty$ a ıraksayan ve terimleri f nin tanım kümesinde bulunan her (x_n) dizisi için $(f(x_n)) \to L$ oluyorsa $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$ yazılır ($-\infty$ daki limit de benzer biçimde tanımlanır). Bu tanımı kullanarak aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

(a) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{3x^3-2x+1}{x^3+5x^2}$

(b) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{2x+1}{\sqrt{x^2+1}}$ ve $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{2x+1}{\sqrt{x^2+1}}$

(c) $\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+x}-x\right)$

(d) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{[\![x]\!]}{x}$

(e) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\sin x}{x}$

(f) $\lim_{x\to+\infty} \sin x$ limitinin olmadığını gösteriniz.

Yol gösterme: (b) için $\sqrt{x^2+1} = |x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$ yazınız ve x in işaretine dikkat ediniz.

SORU 160

$f : A \to R$ verilsin ve a noktası hem $A \cap (-\infty, a)$ kümesinin hem de $A \cap (a, +\infty)$ kümesinin bir yığılma noktası olsun. Terimleri $A \cap (-\infty, a)$ kümesinde bulunan ve a ya yakınsayan her (x_n) dizisi için $(f(x_n)) \to L$ oluyorsa L ye f nin a noktasındaki *sol taraflı limiti* denir ve $\lim_{x\to a^-} f(x) = L$ yazılır. *Sağ taraflı limit* $\lim_{x\to a^+} f(x)$, terimleri $A \cap (a, +\infty)$ kümesinde bulunan diziler kullanılarak benzer biçimde tanımlanır.

(a) $\lim_{x\to a} f(x) = L$ ise $\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = L$ olduğunu gösteriniz.

(b) Karşıt olarak $\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = L$ olsun ve (x_n), terimleri $A\backslash\{a\}$ kümesinde bulunan ve a ya yakınsayan bir dizi olsun. $x_n < a$ olan terimlerin ya da $x_n > a$ olan terimlerin sonlu çoklukta olduğu durumu ve her iki türden de sonsuz çoklukta terim bulunduğu durumu ayrı ayrı inceleyerek $(f(x_n)) \to L$ olduğunu ispatlayınız.

(c) $x \geq 0$ için $f(x) = x^2+1$, $x < 0$ için $f(x) = \cos x$ olsun. $\lim_{x\to 0} f(x)$ limitini bulunuz.

Yol gösterme: (b) de iki türden de sonsuz çoklukta terim varsa verilen $\varepsilon > 0$ için iki alt dizinin her birinden yalnızca sonlu çoklukta terim $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ aralığının dışında kalır.

© Dr. Metin Turgay

SORU 161

Aşağıdaki fonksiyonların verilen noktadaki sağ ve sol taraflı limitlerini bulunuz; fonksiyonun o noktada limitinin olup olmadığını belirtiniz.

(a) $f(x) = [\![x]\!],\ \ a = n \in Z$. (Ayrıca $a \notin Z$ için $\lim_{x\to a}[\![x]\!]$ limitini bulunuz.)

(b) $f(x) = \dfrac{|x-1|}{x-1},\ \ a = 1$

(c) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{|x-1|},\ \ a = 1$

(d) $f(x) = x[\![\dfrac{1}{x}]\!],\ \ a = 0$

(e) $f(x) = 2^{1/x},\ \ a = 0$

(f) c bir sabit olmak üzere $x < 1$ için $f(x) = cx + 3$, $x > 1$ için $f(x) = x^2 - c$ ve $f(1) = 7$ olsun. $\lim_{x\to 1} f(x)$ limitinin var olması için c ne olmalıdır? Bu durumda limit $f(1)$ e eşit midir?

Yol gösterme: (d) için her $u \in R$ için $u - 1 < [\![u]\!] \leq u$ eşitsizliğini $u = \frac{1}{x}$ ile kullanınız ve x in işaretine göre iki durumu ayrı inceleyiniz.

SORU 162

Limitin ε–δ tanımını kullanarak aşağıdaki eşitlikleri ispatlayınız; her şıkta verilen $\varepsilon > 0$ için uygun bir $\delta > 0$ sayısını açıkça belirtiniz.

(a) $\lim_{x\to 2}(3x + 4) = 10$

(b) $\lim_{x\to -1}(5 - 2x) = 7$

(c) $\lim_{x\to 3} x^2 = 9$

(d) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x+3}{x+1} = 2$

(e) $\lim_{x\to 4} \sqrt{x} = 2$

Yol gösterme: (c) ve (d) için önce $\delta \leq 1$ alarak $|x - a|$ ile çarpılan ifadeyi sınırlayınız.

SORU 163

(a) ε–δ tanımıyla $\lim_{x\to 2} x^3 = 8$ olduğunu ispatlayınız.

(b) ε–δ tanımıyla $\lim_{x\to 0} x \sin\dfrac{1}{x} = 0$ olduğunu ispatlayınız.

(c) $\lim_{x\to a} f(x) = L$ önermesinin değilini ε ve δ kullanarak yazınız. Bunu kullanarak $\lim_{x\to 1}(2x + 1) \neq 4$ olduğunu gösteriniz.

(d) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$ olması, her $\varepsilon > 0$ için $x > K$ olan her $x \in A$ için $|f(x) - L| < \varepsilon$ olacak biçimde bir K sayısının bulunmasıyla da ifade edilebilir. Bu biçimiyle $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{2x+1}{x+3} = 2$ olduğunu gösteriniz.

© Dr. Metin Turgay

SORU 164

$A \subset R$, $f : A \to R$ ve a noktası A nın bir yığılma noktası olsun. Fonksiyon limitinin dizisel tanımı ile ε–δ tanımının denk olduğunu ispatlayınız:

(a) $\lim_{x\to a} f(x) = L$ eşitliği ε–δ anlamında sağlanıyorsa, a ya yakınsayan ve terimleri $A \setminus \{a\}$ kümesinde bulunan her (x_n) dizisi için $(f(x_n)) \to L$ olduğunu gösteriniz.

(b) Karşıt olarak, a ya yakınsayan ve terimleri $A \setminus \{a\}$ kümesinde bulunan her (x_n) dizisi için $(f(x_n)) \to L$ oluyorsa, $\lim_{x\to a} f(x) = L$ eşitliğinin ε–δ anlamında da sağlandığını gösteriniz.

Yol gösterme: (b) için olmayana ergi yöntemini kullanınız: Bir $\varepsilon_0 > 0$ için hiçbir $\delta > 0$ uygun değilse, her n için $\delta = \frac{1}{n}$ alarak $0 < |x_n - a| < \frac{1}{n}$ ve $|f(x_n) - L| \geq \varepsilon_0$ olan bir $x_n \in A$ seçiniz.

3.9 BAZI ÖNEMLİ LİMİTLER

SORU 165

(a) Soru 133 (a) daki $|\sin x| \leq |x|$ eşitsizliğini ve $\sin x - \sin a = 2\cos\dfrac{x+a}{2}\sin\dfrac{x-a}{2}$ özdeşliğini kullanarak her $x, a \in R$ için $|\sin x - \sin a| \leq |x-a|$ olduğunu gösteriniz. Buradan ε–δ tanımıyla $\lim_{x\to a} \sin x = \sin a$ olduğunu ispatlayınız. Benzer şekilde $\lim_{x\to a} \cos x = \cos a$ olduğunu gösteriniz.

(b) $\cos a \neq 0$ ise $\lim_{x\to a} \tan x = \tan a$ olduğunu gösteriniz.

(c) Soru 133 (d) ve dizisel tanımı kullanarak $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ ve $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{x} = 1$ olduğunu gösteriniz.

(d) $\lim_{x\to+\infty} x \sin\dfrac{1}{x} = 1$ olduğunu gösteriniz ve sonucu Soru 163 (b) ile karşılaştırınız.

SORU 166

$\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ limitinden yararlanarak aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

(a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin 5x}{3x}$ (b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan 4x}{\sin 2x}$ (c) $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$

(d) $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 2x}{x \sin x}$ (e) $\lim_{x\to 0} x \cot 3x$ (f) $\lim_{x\to \pi} \dfrac{\sin x}{\pi - x}$

(g) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan x - \sin x}{x^3}$ (h) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(x^2)}{x}$ (i) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\arctan x}{x}$

Yol gösterme: (f) için $t = \pi - x$, (i) için $t = \arctan x$ dönüşümünü yapınız. $0 \leq t < \frac{\pi}{2}$ için $t \leq \tan t$ olduğundan her x için $|\arctan x| \leq |x|$ dir; dolayısıyla $x \to 0$ iken $t \to 0$ olur.

© Dr. Metin Turgay

SORU 167

Bu soruda $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ dizisinin limitinin e olduğundan (bkz. Soru 122) yola çıkarak $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ olduğu ispatlanacaktır.

(a) $x \geq 1$ ve $n = [\![x]\!]$ ise

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n \leq \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

olduğunu gösteriniz.

(b) (n_k), $+\infty$ a ıraksayan bir doğal sayı dizisi ise $\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k} \to e$ olduğunu gösteriniz.

(a) yı kullanarak $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ olduğunu ispatlayınız.

(c) $x < -1$ için $y = -x-1$ yazarak $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \left(1+\frac{1}{y}\right)^y\left(1+\frac{1}{y}\right)$ olduğunu gösteriniz ve $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ sonucunu çıkarınız.

(d) $\lim\limits_{t\to0}(1+t)^{1/t} = e$ olduğunu gösteriniz.

Yol gösterme: (d) için $t \to 0^+$ ve $t \to 0^-$ durumlarında $x = \frac{1}{t}$ alınız ve Soru 160 sonucunu kullanınız.

SORU 168

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$, $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ ve $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1}{x} = 1$ limitlerini kullanarak aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x$ (b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x$ (c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^x$

(d) $\lim\limits_{x\to0}(1+3x)^{1/x}$ (e) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+5x)}{x}$ (f) $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{3x}-1}{\sin 2x}$

(g) $\lim\limits_{x\to0}\frac{2^x-1}{x}$ (h) $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-e^{-x}}{x}$ (i) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\frac{x+1}{x}$

Yol gösterme: (g) için $2^x = e^{x\ln 2}$ yazınız.

SORU 169

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ ise a ya yakınsayan, terimleri a dan farklı ve f nin tanım kümesinde bulunan her (x_n) dizisi için $(f(x_n)) \to L$ olduğunu kullanarak aşağıdaki dizi limitlerini bulunuz.

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(e^{1/n}-1\right)$ (b) $\lim\limits_{n\to\infty} n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{b}-1\right)$ $(b>0)$ (d) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln(n+1)-\ln n}{\sin\frac{1}{n}}$

© Dr. Metin Turgay

(e) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^n$

(f) $\lim_{n\to\infty} n^2\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)$

© Dr. Metin Turgay