

Matematik Analiz I Çalışma Soruları

Metin Turgay

December 21, 2025

Bölüm 1

Çalışma Soruları

1. Aşağıdaki fonksiyonların tanım kümelerini bulunuz.

(a) $f(x) = \sqrt{x-2} + \sqrt{4-x}$

(b) $f(x) = \sqrt[3]{\frac{2-x}{x^2-9}}$

(c) $f(x) = \frac{2-x}{x^2-9}$

(d) $f(x) = \sqrt{\frac{2-x}{x^2-9}}$

(e) $f(x) = \frac{x}{\|x\|}$

Aşağıdaki fonksiyonların en geniş tanım kümelerini bulunuz.

(a) $f(x) = \sqrt{6+5x-x^2}$

(b) $f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{3-x}$

(c) $f(x) = \sqrt{1-\sqrt{9-x^2}}$

(d) $f(x) = \sqrt{4-2\sqrt{1+x^2}}$

(e) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{|x|-x}}$

(f) $f(x) = \log |1-x^2|$

(g) $f(x) = \sqrt{\arcsin(\log_2 x)}$

2. -1 ve 2 sayılarının $f(x) = \frac{2x-1}{x+4}$ rasyonel fonksiyonunun görüntü kümesinde olup olmadığını araştırınız.

3. Aşağıdaki fonksiyonların tanım ve görüntü kümelerini bulunuz.

(a) $f(x) = \sqrt{x-2}$

(b) $f(x) = x^2 - 4x + 5$

(c) $f(x) = x^3 - 1$

- (d) $f(x) = \sqrt{\frac{3-x}{x+1}}$
- (e) $f(x) = \frac{x^2-3x+4}{x^2-3x+2}$
4. $f(x) = \frac{x}{x-2}$ olsun. $(f \circ g)(x) = x$ olacak şekilde bir $y = g(x)$ fonksiyonu bulunuz.
5. $f(x) = 2x^3 - 4$ olsun. $(f \circ g)(x) = x + 2$ olacak şekilde bir $y = g(x)$ fonksiyonu bulunuz.
6. $f(x) = \sqrt{x - \|x\|}$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.
7. $f(x) = 2|x - 1| + 3|x + 1|$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.
8. $e^{5-3x} = 10$ denklemini çözünüz.
9. $y = \ln x$ fonksiyonunun grafiğinden yararlanarak $y = \ln |x|$, $y = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$, $y = \ln(x - 2) - 1$ fonksiyonlarının grafiklerini çiziniz.
10. $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ eşitliğinin varlığını gösteriniz. Buradan $\log_a b = \frac{\ln b}{\ln a}$ eşitliği yazılabilir mi?
11. Aşağıda verilen fonksiyonların tanım kümelerini bulunuz.
- (a) $f(x) = \ln(x^2 - 9)$
- (b) $f(x) = \ln(x^2 - 2x)$
- (c) $f(x) = \ln(\sqrt{x - 4} + \sqrt{6 - x})$
- (d) $f(x) = \arcsin(\ln x)$
- (e) $f(x) = \log(1 - \log(x^2 - 5x + 16))$
- (f) $f(x) = \sqrt{\ln(x - 2)}$
12. $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ fonksiyonunun tek fonksiyon olduğunu gösteriniz.
13. Aşağıdaki fonksiyonların tersi için bir formül bulunuz.
- (a) $y = \ln(x + 3)$
- (b) $y = \frac{1+e^x}{1-e^x}$
14. $f(x) = \ln(4 - x^2)$ fonksiyonunun tanım ve görüntü kümesini bulunuz.
15. Aşağıdaki denklem ve eşitsizliklerin çözüm kümelerini bulunuz.
- (a) $\ln(\ln x) = 1$
- (b) $e^{2x+3} - 7 = 0$
- (c) $\ln x - \ln(x - 1) = 1$
- (d) $\ln x > -1$
- (e) $e^{2-3x} > 4$

16. f 'nin bir çift fonksiyon ve g 'nin bir tek fonksiyon olduğunu ve her ikisinin de bütün reel doğru $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı olduğunu varsayın. Aşağıdakilerden hangileri (tanımlı oldukları yerlerde) çifttir? tektir?
- (a) fg
 - (b) f/g
 - (c) g/f
 - (d) $f^2 = ff$
 - (e) $g^2 = gg$
 - (f) $f \circ g$
 - (g) $g \circ f$
 - (h) $f \circ f$
 - (i) $g \circ g$
17. Bir fonksiyon hem çift ve hem de tek olabilir mi? Cevabınızı açıklayın.
18. $f(x) = \sqrt{x}$ ve $g(x) = \sqrt{1-x}$ fonksiyonlarının grafiklerini
- (a) toplamlarının,
 - (b) çarpımlarının,
 - (c) her iki farklarını,
 - (d) her iki oranlarının grafikleri ile birlikte çiziniz.
19. $f(x) = x - 7$ ve $g(x) = x^2$ olsun. f ve g grafiklerini $f \circ g$ ve $g \circ f$ grafikleri ile birlikte çizin.
20. Aşağıdaki alıştırmalardaki bağıntıları türetmek için açı toplama formüllerini kullanın.
- (a) $\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin x$
 - (b) $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$
 - (c) $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$
 - (d) $\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos x$
 - (e) $\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$
 - (f) $\sin(A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$
 - (g) $\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$ bağıntısında $B = A$ alırsanız ne olur? Bu sonuç daha önceden bildiğiniz bir şeyle uyuyor mu?
 - (h) Açı toplama formüllerinde $B = 2\pi$ alırsanız ne olur? Sonuçlar daha önceden bildiğiniz bir şeylerle uyuyor mu?
21. Aşağıdaki alıştırmalarda, verilen büyüklüğü $\sin x$ ve $\cos x$ cinsinden ifade edin.

- (a) $\cos(\pi + x)$
- (b) $\sin(2\pi - x)$
- (c) $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$
- (d) $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$
- (e) $\sin\frac{7\pi}{12}$,nin değerini $\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right)$ 'ü hesaplayarak bulun.
- (f) $\cos\frac{11\pi}{12}$, nin değerini $\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}\right)$ 'ü hesaplayarak bulun.
- (g) $\cos\frac{\pi}{12}$ 'nin değerini bulun.
- (h) $\sin\frac{5\pi}{12}$ 'nin değerini bulun.

22. Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

- (a) $\lim_{x \rightarrow -7} (2x + 5)$
- (b) $\lim_{x \rightarrow 12} (10 - 3x)$
- (c) $\lim_{x \rightarrow 2} (-x^2 + 5x - 2)$
- (d) $\lim_{x \rightarrow -2} (x^3 - 2x^2 + 4x + 8)$
- (e) $\lim_{t \rightarrow 6} 8(t - 5)(t - 7)$
- (f) $\lim_{s \rightarrow 2/3} 3s(2s - 1)$
- (g) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+3}{x+6}$
- (h) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{4}{x-7}$
- (i) $\lim_{y \rightarrow -5} \frac{y^2}{5-y}$
- (j) $\lim_{y \rightarrow 2} \frac{y+2}{y^2+5y+6}$
- (k) $\lim_{x \rightarrow -1} 3(2x - 1)^2$
- (l) $\lim_{x \rightarrow -4} (x + 3)^{1984}$
- (m) $\lim_{y \rightarrow -3} (5 - y)^{4/3}$
- (n) $\lim_{z \rightarrow 0} (2z - 8)^{1/3}$
- (o) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{3}{\sqrt{3h+1}+1}$
- (p) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{5}{\sqrt{5h+4}+2}$
- (q) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3h+1}-1}{h}$
- (r) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{5h+4}-2}{h}$
- (s) $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x}-3}{x-9}$
- (t) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{4x-x^2}{2-\sqrt{x}}$
- (u) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x+3}-2}$
- (v) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x^2+8}-3}{x+1}$
- (w) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2+12}-4}{x-2}$

(x) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+2}{\sqrt{x^2+5}-3}$

Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

(a) $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\sin x}{x}$

(b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}$

(c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{bx}$

(d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\sin bx} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos ax}{x^2}$

(e) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a}$

(f) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$

(g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2}$

23. Aşağıdaki sorular için Sıkıştırma Teoreminden yararlanabilirsiniz.

(a) $-1 \leq x \leq 1$ için $\sqrt{5-2x^2} \leq f(x) \leq \sqrt{5-x^2}$ ise $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 'i bulun.

(b) Her x için $2 - x^2 \leq g(x) \leq 2 \cos x$ ise $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ 'i bulun.

(c) Sıfıra yakın bütün x değerleri için

$$1 - \frac{x^2}{6} < \frac{x \sin x}{2 - 2 \cos x} < 1$$

eşitsizliklerinin geçerli olduğu ispatlanabilir. Bu size

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{2 - 2 \cos x}$$

hakkında ne söyler? Yanıtınızı açıklayın.

(d) $-2 \leq x \leq 2$ için $y = 1 - (x^2/6)$, $y = (x \sin x)/(2 - 2 \cos x)$ ve $y = 1$ grafiklerini birlikte çizin. $x \rightarrow 0$ iken grafiklerin davranışını açıklayın.

24. $f(x) = 9x - 5$ olsun. Bir $\delta > 0$ sayısı bulunuz ki $|x - 1| < \delta$ olduğunda $|f(x) - 4| < \frac{1}{10}$ kalsın.

25. $(g(x) = 2x^2 + 3)$ olsun. Bir $\delta > 0$ sayısı bulunuz ki $|x| < \delta$ olduğunda $|g(x) - g(0)| < \frac{1}{2}$ olsun.

26. $f(x) = \frac{x}{x+2}$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. Oyle bir $\delta > 0$ bulunuz ki $|x - 1| < \delta$ olduğunda $|f(x) - \frac{1}{3}| < \varepsilon$ kalsın.

27. Aşağıdaki alıştırılarda fonksiyonlar hangi noktalarda sürekli değildirler? Hangi noktalarda, mümkünse, süreksizlikler kaldırılabilir, hangilerinde kaldırılamaz? Açıklayın.

(a) $y = \frac{1}{x-2} - 3x$

(b) $y = \frac{1}{(x+2)^2} + 4$

- (c) $y = \frac{x+1}{x^2-4x+3}$
 (d) $y = \frac{x+3}{x^2-3x-10}$
 (e) $y = |x-1| + \sin x$
 (f) $y = \frac{1}{|x|+1} - \frac{x^2}{2}$
 (g) $y = \frac{\cos x}{x}$
 (h) $y = \frac{x+2}{\cos x}$
 (i) $y = \csc 2x$
 (j) $y = \tan \frac{\pi x}{2}$
 (k) $y = \frac{x \tan x}{x^2+1}$
 (l) $y = \frac{\sqrt{x^4+1}}{1+\sin^2 x}$
 (m) $y = \sqrt{2x+3}$
 (n) $y = \sqrt[4]{3x-1}$
 (o) $y = (2x-1)^{1/3}$
 (p) $y = (2-x)^{1/5}$
28. $A, B \subset R, f : A \rightarrow R, g : B \rightarrow R$ fonksiyonlar verilmiş ve $f(A) \subset B$ olsun. f fonksiyonunu a noktasında, g fonksiyonu $f(a)$ noktasında sürekli olduğunda gof fonksiyonu da a noktasında süreklidir, ispatlayınız.
29. f fonksiyonu a noktasında sürekli olduğunda fonksiyonunun a noktasında sürekli olduğunu gösteriniz. $|f|$ sürekli olduğunda f sürekli olmak zorunda mıdır?
30. $A \subset R, f : A \rightarrow R$ ve $g : B \rightarrow R$ fonksiyonları $a \in A$ noktasında sürekli iseler,
- $$p = \max\{f, g\}, q = \min\{f, g\}$$
- fonksiyonları da a noktasında süreklidir, gösteriniz.
31. Aşağıdaki örneklerde limitleri bulun. Fonksiyonlar yaklaşılan noktalarda sürekli midirler?
- (a) $\lim_{x \rightarrow \pi} \sin(x - \sin x)$
 (b) $\lim_{t \rightarrow 0} \sin\left(\frac{\pi}{2} \cos(\tan t)\right)$
 (c) $\lim_{y \rightarrow 1} \sec(y \sec^2 y - \tan^2 y - 1)$
 (d) $\lim_{x \rightarrow 0} \tan\left(\frac{\pi}{4} \cos(\sin x^{1/3})\right)$
32. Aşağıdaki sorularda verilen noktada eğrinin teğet denklemini bulun. Eğriyi ve teğetini birlikte çizin.
- (a) $y = 4 - x^2, \quad (-1, 3)$
 (b) $y = (x-1)^2 + 1, \quad (1, 1)$

- (c) $y = 2\sqrt{x}$, $(1, 2)$
 (d) $y = \frac{1}{x^2}$, $(-1, 1)$
 (e) $y = x^3$, $(-2, -8)$
 (f) $y = \frac{1}{x^3}$, $(-2, -\frac{1}{8})$
33. Aşağıdaki alıştırmalarda, verilen noktada fonksiyonun grafiğinin eğimini bulun. O noktadaki teğetin denklemini yazın.
- (a) $f(x) = x^2 + 1$, $(2, 5)$
 (b) $f(x) = x - 2x^2$, $(1, -1)$
 (c) $g(x) = \frac{x}{x-2}$, $(3, 3)$
 (d) $g(x) = \frac{8}{x^2}$, $(2, 2)$
 (e) $h(t) = t^3$, $(2, 8)$
 (f) $h(t) = t^3 + 3t$, $(1, 4)$
 (g) $f(x) = \sqrt{x}$, $(4, 2)$
 (h) $f(x) = \sqrt{x+1}$, $(8, 3)$
34. Tanımı kullanarak, aşağıdaki alıştırmalardaki fonksiyonların türevlerini bulun. Sonra istenilen türev değerlerini bulun.
- (a) $f(x) = 4 - x^2$; $f'(-3), f'(0), f'(1)$
 (b) $F(x) = (x-1)^2 + 1$; $F'(-1), F'(0), F'(2)$
 (c) $g(t) = \frac{1}{t^2}$; $g'(-1), g'(2), g'(\sqrt{3})$
 (d) $k(z) = \frac{1-z}{2z}$; $k'(-1), k'(1), k'(\sqrt{2})$
 (e) $p(\theta) = \sqrt{3\theta}$; $p'(1), p'(3), p'(2/3)$
 (f) $r(s) = \sqrt{2s+1}$; $r'(0), r'(1), r'(1/2)$
35. Aşağıdaki alıştırmalarda, fonksiyonların türevlerini alın. Sonra fonksiyonun grafiği üzerinde belirtilen noktadaki teğetin denklemini bulun.
- (a) $y = f(x) = \frac{8}{\sqrt{x-2}}$, $(x, y) = (6, 4)$
 (b) $w = g(z) = 1 + \sqrt{4-z}$, $(z, w) = (3, 2)$
36. Aşağıdaki alıştırmalarda, türevlerin değerini bulun.
- (a) $s = 1 - 3t^2$ ise $\frac{ds}{dt} \Big|_{t=-1}$
 (b) $y = 1 - \frac{1}{x}$ ise $\frac{dy}{dx} \Big|_{x=\sqrt{3}}$
 (c) $r = \frac{2}{\sqrt{4-\theta}}$ ise $\frac{dr}{d\theta} \Big|_{\theta=0}$
 (d) $w = z + \sqrt{z}$ ise $\frac{dw}{dz} \Big|_{z=4}$
37. Aşağıdaki alıştırmalarda,

- (a) Verilen $y = f(x)$ fonksiyonunun $f'(x)$ türevini bulun.
- (b) $y = f(x)$ ile $y = f'(x)$ 'i farklı koordinat eksenleri kullanarak yanyana çizin ve aşağıdaki soruları yanıtlayın.
- (c) Hangi x değerlerinde, varsa, f' pozitif? Sıfır? Negatiftir?
- (d) Hangi x değer aralıklarında, varsa, x -arttıkça $y = f(x)$ fonksiyonu da artar, veya x -azaldıkça azalır? Bunun (c) şıkında bulduklarınızla ilişkisi nedir? (Bu ilişkiyi Bölüm 4'te daha yakından inceleyeceğiz.)
- $y = -x^2$
 - $y = -1/x$
 - $y = x^3/3$
 - $y = x^4/4$
38. $y = x^3$ eğrisinin negatif bir eğimi var mıdır? Varsa, nerede bulunur? Yanıtınızı açıklayın.
39. $y = 2\sqrt{x}$ eğrisinin yatay bir teğeti var mıdır? Varsa, nerede bulunur? Yanıtınızı açıklayın.
40. Aşağıdaki bağıntıların doğruluğunu gösteriniz.
- (a) $\sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$
- (b) $\cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
- (c) $\tan(\arccos x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$
- (d) $\tan(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$
- (e) $\arcsin(\cos x) = \frac{\pi}{2} - x$
- (f) $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$
- (g) $\arcsin x + \arcsin t = \arcsin (x\sqrt{1-t^2} + t\sqrt{1-x^2})$
- (h) $\arccos x + \arccos t = \arccos (xt - \sqrt{(1-x^2)(1-t^2)})$
41. Aşağıdaki fonksiyonların türevlerini hesaplayınız.
- (a) $f(x) = x^2 \tan x$
- (b) $f(x) = \frac{\sin x}{1+\cos x}$
- (c) $f(x) = \frac{\tan x}{x}$
- (d) $f(x) = \frac{x}{\sin x + \cos x}$
- (e) $f(x) = \frac{\tan x - 1}{\sec x}$
- (f) $f(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x \sin x + \cos x}$
42. $y = x \cos x$ eğrisinin $(\pi, -\pi)$ noktasındaki teğetin denklemini bulunuz.
43. $y = \sin(\sin x)$ eğrisinin $(\pi, 0)$ noktasındaki teğetin denklemini bulunuz.

44. $y = \sec x - 2 \cos x$ eğrisinin $(\frac{\pi}{3}, 1)$ noktasındaki teğetin denklemini bulunuz.
45. Hangi x değeri için $f(x) = x + 2 \sin x$ eğrisinin yatay tegeti vardır. $y = \frac{\cos x}{2 + \sin x}$ eğrisi üzerinde tegetin yatay olduğu noktalar bulunuz.
46. Zincir kuralı yardımıyla aşağıdaki fonksiyonların türevini hesaplayınız.
- (a) $f(x) = \sin 3x^2$
 - (b) $f(x) = \tan^3 x + \cos(x^2 + 1)$
 - (c) $f(x) = (\tan \sqrt{x})^5$
 - (d) $f(x) = \cos(\sin x)$
 - (e) $f(x) = \tan(\sin x)$
 - (f) $f(x) = \sin(\sin(\sin x))$
 - (g) $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$
 - (h) $f(x) = \frac{1}{3} \tan^3 x - \tan x + x$
 - (i) $f(x) = (2 - 3 \cos x)^{\frac{3}{2}}$
 - (j) $f(x) = \sin^2(2x - 1)^{\frac{3}{2}}$
47. $\cos 62^\circ$ yi yaklaşık olarak hesaplayınız. ($62^\circ = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{90}$ olup $\Delta x = \frac{\pi}{90}$ alınız)
48. $\cos 43^\circ$ ve $\sin 32^\circ$ yi yaklaşık olarak hesaplayınız.
49. Zincir kuralını da dikkate alarak aşağıdaki fonksiyonların türevini hesaplayınız.
- (a) $f(x) = \arcsin \sqrt{1 - x^2}$
 - (b) $f(x) = x \arctan \sqrt{x}$
 - (c) $f(x) = \tan^{-1}(x - \sqrt{1 + x^2})$
 - (d) $f(x) = \sqrt{1 - x^2} \arcsin x$
 - (e) $f(x) = (1 + x^2) \arctan x$
 - (f) $f(x) = \arcsin(\tan x)$
50. $f(x) = (x - \frac{1}{2}) \arcsin \sqrt{x} + \frac{1}{2} \sqrt{x - x^2}$ fonksiyonu için $f'(1) = ?$
51. $f(x) = \frac{1}{x}$ için $f^{(n)}(x) = ?$, $f^{(n)}(1) = ?$
52. $f(x) = \sin x$ için $f^{(n)}(x) = ?$
53. $f(x) = \cos 3x$ için $f^{(n)}(x) = ?$
54. $f(x) = \sin^2 x$ için $f^{(n)}(x) = ?$
55. Aşağıdaki fonksiyonlar için $f''(0)$ var mıdır? Varsa bu türevi hesaplayınız.

- (a) $f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$
- (b) $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$
- (c) $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$
56. $x^3 + y^3 + 3xy + 3y^2 + 6x + 6y = 0$ ile tanımlen $y = f(x)$ fonksiyonu i için $y''(1) = ?$
57. Taban yarıçap 6 cm yüksekliği 10 cm olan bir koninin içine yerleştirilebilen maksimum hacimli silindirin hacmi ne olur?
58. Hipotenüsü $\sqrt{3}$ birim olan bir dik üçgen dik kenarlarından biri etrafında döndürülüyor. Oluşan koninin hacmi en fazla ne olur?
59. Yarıçap 6 cm olan küre içine yerleştirilebilen bir dik koninin hacmi en fazla ne olur?
60. Taban yarıçap 6 cm yüksekliği 12 cm olan bir koninin içine bir başka koni ters ve tabanlar paralel olacak şekilde yerleştiriliyor. Yerleştirilen koninin taban yarıçap ve yüksekliği ne olmalıdır ki hacmi en fazla olsun.
61. Yarıçap 2 cm olan bir yarı çemberin içine bir dikdörtgen yerleştirilecektir. Bu dikdörtgenin alanı en fazla ne olur.
62. Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.
- (a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{2x^2 + 3x + 1} = 0$
- (b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{6}$
- (c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan x}{\frac{1}{x}} = 1$
- (d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \tan x}{x^3} = -\frac{1}{2}$
- (e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(1 - \cos x)}{x^2} = \frac{1}{2}$
- (f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^3 3x - \cos^3 2x}{x^2} = -\frac{15}{2}$
- (g) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\cot x - \frac{1}{x} \right) = 0$
- (h) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{3x+1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) = 3$
- (i) $\lim_{x \rightarrow 0} (\csc^2 x - x^{-2}) = \frac{1}{3}$
- (j) $\lim_{x \rightarrow 0^-} (1 - e^x)^{\sin x} = 1$
- (k) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\cot x)^{\frac{1}{\ln x}} = e^{-1}$
- (l) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3x)^{\frac{1}{x}} = e^3$
- (m) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^x = 1$
- (n) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^{\tan x} = 1$

- (o) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x^2-1)\sqrt{\|x\|}}{\sin(x-1)} = 2$
- (p) $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\sin x} - \sqrt{1+\tan x}}{x^3} = -\frac{1}{4}$
- (q) $\lim_{x \rightarrow y} \frac{\sin^{-1} x - \sin^{-1} y}{x-y} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$
- (r) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - \sin x^2}{x^4} = -\frac{1}{3}$
- (s) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x + \ln x}{e^x + x} = 1$
- (t) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} (\sin x)^{\sec x} = 1$
- (u) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\cot x - \csc x) = 0$
- (v) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x} = -\frac{1}{2}e$
- (w) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{1-\cos x}} = e^{-\frac{1}{3}}$
- (x) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\arcsin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\frac{1}{6}}$

63. Aşağıda verilen fonksiyonların grafiğini türev yardımıyla çiziniz.

- (a) $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$
- (b) $f(x) = \frac{x^3+2}{x}$
- (c) $f(x) = x^2 e^{-x}$
- (d) $f(x) = x e^{1-x^2}$
- (e) $f(x) = 1 - (x-2)^{\frac{2}{3}}$
- (f) $f(x) = x(x-1)^{2/3}$

1.1 Integral

1. Aşağıdaki alıştırmalarda, fonksiyonun grafiğinin altındaki alanı sonlu yaklaşımlar kullanarak tahmin edin.

- Eşit genişlikte iki dikdörtgenden oluşan bir alt toplam.
- Eşit genişlikte dört dikdörtgenden oluşan bir alt toplam.
- Eşit genişlikte iki dikdörtgenden oluşan bir üst toplam.
- Eşit genişlikte dört dikdörtgenden oluşan bir üst toplam.

- (a) $f(x) = x^2$ between $x = 0$ and $x = 1$.
- (b) $f(x) = x^3$ between $x = 0$ and $x = 1$.
- (c) $f(x) = 1/x$ between $x = 1$ and $x = 5$.
- (d) $f(x) = 4 - x^2$ between $x = -2$ and $x = 2$.

2. Aşağıdaki alıştırmalarda, her $f(x)$ fonksiyonunu verilen aralıkta çizin. Aralığı eşit uzunluklu dört alt aralığa bölün. Sonra çiziminize, $c_k k$. alt aralığın (a) sol uç noktası, (b) sağ uç noktası ve (c) orta noktası olmak üzere, $\sum_{k=1}^4 f(c_k) \Delta x_k$, Riemann toplamıyla ilişkili dikdörtgenleri ekleyin. (Her dikdörtgen kümesi için ayrı bir resim çizin.)

(a) $f(x) = x^2 - 1$, $[0, 2]$

(b) $f(x) = -x^2$, $[0, 1]$

(c) $f(x) = \sin x$, $[-\pi, \pi]$

(d) $f(x) = \sin x + 1$, $[-\pi, \pi]$

(e) $P = \{0, 1.2, 1.5, 2.3, 2.6, 3\}$ bölünüşünün normunu bulun.

(f) $P = \{-2, -1.6, -0.5, 0, 0.8, 1\}$ bölünüşünün normunu bulun.

3. Aşağıdaki alıştırmalardaki fonksiyonlar için, $[a, b]$ aralığını n tane eşit alt aralığa bölmekle elde edilen üst toplam için bir formül bulunuz. Sonra, aralığı üzerinde egrinin altında kalan alanı hesaplamak için bu toplamların $n \rightarrow \infty$ iken limitlerini alınız.

(a) $f(x) = 1 - x^2$, $[0, 1]$ üzerinde.

(b) $f(x) = 2x$, $[0, 3]$ üzerinde.

(c) $f(x) = x^2 + 1$, $[0, 3]$ üzerinde.

(d) $f(x) = 3x^2$, $[0, 1]$ üzerinde.

(e) $f(x) = x + x^2$, $[0, 1]$ üzerinde.

(f) $f(x) = 3x + 2x^2$, $[0, 1]$ üzerinde.

4. Aşağıdaki eşitliklerle tanımlanan fonksiyonların $[-1, 3]$ aralığındaki integralini hesaplayınız.

(a) $f(x) = \lceil x \rceil$

(b) $f(x) = \lceil 2x \rceil$

(c) $f(x) = \lceil -x \rceil$

(d) $f(x) = \lceil x + \frac{1}{2} \rceil$

(e) $f(x) = 2\|x\|$

(f) $f(x) = \lceil x \rceil + \lceil x + \frac{1}{2} \rceil$

5. $\int_a^b \|x\| dx + \int_a^b \lceil -x \rceil dx = a - b$ olduğunu gösteriniz.

6. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\int_0^n \|x\| dx = \frac{n(n-1)}{2}$ olduğunu gösteriniz.

7. $x \geq 0$ için $f(x) = \int_0^x \lceil t \rceil dt$ olsun. f fonksiyonunun $[0, 4]$ aralığındaki grafiğini çizin.

8. $\int_0^2 \|x^2\| dx = 5 - \sqrt{2} - \sqrt{3}$ olduğunu gösteriniz.

9. (a) $\int_0^9 \|\sqrt{t}\| dt$ integralini hesaplayınız.
 (b) $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\int_0^{n^2} \|\sqrt{t}\| dt = \frac{n(n-1)(4n+1)}{6}$ olduğunu gösteriniz.
10. Integral tanımından yararlanarak aşağıdaki integralleri hesaplayınız.
- (a) $\int_0^1 x dx$
 (b) $\int_0^1 x^2 dx$
 (c) $\int_0^1 x^3 dx$
 (d) $\int_a^b e^x dx$
 (e) $\int_0^{10} 2^x dx$
11. Aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu gösteriniz.
- (a) $\int_0^8 (\sqrt{2x} + \sqrt[3]{x}) dx = \frac{100}{3}$
 (b) $\int_2^6 \sqrt{x-2} dx = \frac{16}{3}$
 (c) $\int_0^1 \frac{x dx}{x^2+3x+2} = \ln \frac{9}{8}$
 (d) $\int_3^4 \frac{dx}{x^2-3x+2} = \ln \frac{4}{3}$
 (e) $\int_0^1 \frac{x^3 dx}{x^8+1} = \frac{\pi}{16}$
 (f) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{4}$
 (g) $\int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}} = \frac{\pi}{2}$
 (h) $\int_0^1 \frac{y^2 dy}{\sqrt{y^6+4}} = \frac{1}{3} \ln \frac{1+\sqrt{5}}{2}$
 (l) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx = \frac{2}{3}$
 (i) $\int_{\pi}^{\frac{5\pi}{4}} \frac{\sin 2x dx}{\cos^4 x + \sin^4 x} = \frac{\pi}{4}$
 (j) $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x \ln x} = \ln 2$
 (k) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx = 0$