

Fonksiyonel Analiz I Uygulama Notları

Metin Turgay

December 26, 2025

Bu materyalde uygulama dersinde çözülecek olan sorular için gerekli temel kavramlar hatırlatılarak çözülmüş/çözülmemiş sorular çözümsüz olarak verilecektir.

Bu belgede fazlaca yazım hatası bulunmaktadır. Her okuduğunuzu dikkatle takip etmelisiniz. Bulduğunuz yazım hatalarını düzeltilemesi için

metin.turgay@selcuk.edu.tr

üzerinden bana iletebilirsiniz.

Emeği geçenler

Şerife Nur Karaman Dilek Özer

Berat Sert

Büşra Adırbelli

Bölüm 1

Çalışma Soruları

1. Tüm reel sayıların kümesi üzerinde $d(x, y) = (x - y)^2$ ile tanımlı d fonksiyonu bir metrik tanımlar mı?
2. d, X üzerinde bir metrik olsun.
 - a. kd
 - b. $k + d$

ifadelerinin de X üzerinde bir metrik belirtebilmeleri için k sabitlerini bulunuz.

3. (X, d) bir metrik uzay ve $A, B \subset X$ olsun. O halde A ile B kümeleri arasındaki uzaklık

$$D(A, B) = \inf\{d(a, b) : a \in A, b \in B\}$$

ile tanımlanır. Bu ifade X 'in kuvvet kümeleri üzerinde bir metrik tanımlar mı?

4. (X, d_1) ve (Y, d_2) metrik uzayların $E = X \times Y$ Kartezyen çarpımı bir çok yolla bir (E, d) metrik uzayına dönüştürülebilir. Örneğin $(x_1, x_2) \in X, (y_1, y_2) \in Y$ olmak üzere $d(x, y) = d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2)$ ile tanımlı d fonksiyonunun $X \times Y$ üzerinde bir metrik olduğunu gösteriniz.
5. $(X = \mathbb{R}^n)$ olmak üzere $x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in X$ için

$$d_2(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2}$$

ile tanımlanan $d_2 : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun X üzerinde bir metrik olduğunu gösterelim.

6. (X, d) bir metrik uzay olsun. $\forall x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ için

$$d(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$$

şeklinde tanımlanan d fonksiyonu $\mathbb{R}^2$ üzerinde bir metrik midir?

7. $a \in \mathbb{R}$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. $\mathbb{R}$ üzerindeki standart metriğe göre

- a. $B(a, \varepsilon)$
- b. $D(a, \varepsilon)$
- c. $S(a, \varepsilon)$

kümelerini bulunuz.

8. $\varepsilon > 0$ bir reel sayı ve $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ olmak üzere $\mathbb{R}^2$ üzerindeki d_2 standart metriğine göre

- a. $B(a, \varepsilon)$
- b. $D(a, \varepsilon)$
- c. $S(a, \varepsilon)$

kümelerini bulunuz.

9. $[a, b]$ kapalı ve sınırlı aralığı üzerinde tanımlı reel değerli ve sınırlı bütün fonksiyonların oluşturduğu $B[a, b]$ vektör uzayı üzerinde $\forall f, g \in B[a, b]$ için

$$\begin{aligned} d_\infty(f, g) &= |f - g|_\infty \\ &= \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in [a, b]\} \end{aligned}$$

ile tanımlanan dönüşüm bir metrik midir?

10. $d_2 : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere $d_2(n, m) = |n - m|^2$ kuralı ile verilen dönüşüm bir metrik midir?

11. $\mathbb{R}^2$ 'de $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2)$ olmak üzere

$$d_\infty(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$$

metriğini göz önüne alalım. $B((0, 0), 1), D((0, 0), 1), S((0, 0), 1)$ kümelerini ifade edip, geometrik olarak gösteriniz.

12. $\mathbb{R}$ standart uzayında $\mathbb{Q}$ ve $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ kümelerinin yığılma noktalarını bulunuz.
13. $A = \{x \in \mathbb{R} : x^3 + 2x^2 - 3x \leq 0\}$ kümesinin $\mathbb{R}$ 'de kapalı olduğunu gösteriniz.
14. $d(x, y) = |x - y|$ olmak üzere $(\mathbb{Q}, d)$ metrik uzayı ve $S = \{x \in \mathbb{Q} : 2 < x^2 < 3\}$ kümesi verilsin. S kümesinin $\mathbb{Q}$ içinde kapalı ve sınırlı olduğunu fakat kompakt olmadığını gösteriniz.

15. $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ bir sürekli fonksiyon, X metrik uzay olsun. $Z(f) = \{p \in X : f(p) = 0\}$ kümesinin kapalı olduğunu gösteriniz.
16. (X, d) bir metrik uzay $E \subset X$ boştan farklı bir küme olsun. $x \in X$ için X 'den E 'ye uzaklığı

$$\rho_E(x) = \inf_{z \in E} d(x, z)$$

olarak tanımlayalım.

- a. $\rho_E(x) = 0 \iff x \in \overline{E}$ olduğunu gösteriniz.
- b. ρ_E fonksiyonunun X üzerinde düzgün sürekli olduğunu gösteriniz.
17. $\ell_1 = \{(x_k) : \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| < \infty, x_k \in \mathbb{F}\}$ olmak üzere $(a_n) = \frac{2^n x^n}{3^n}$ dizisinin hangi $x \in \mathbb{R}$ değerleri için ℓ_1 uzayına ait olduğunu bulunuz.
18. (X, d) bir metrik uzay ve $d_1(x, y) = \frac{d(x, y)}{1+d(x, y)}$ olsun. d_1 'in bir metrik olduğunu ispatlayınız ve bu metrik altında uzayın her zaman sınırlı olduğunu gösteriniz.
19. $f, g : X \rightarrow Y$ iki sürekli fonksiyon ve $D \subset X$ kümesi X uzayında **yoğun** (dense) bir küme olsun. Her $x \in D$ için $f(x) = g(x)$ ise, tüm X üzerinde $f = g$ olduğunu ispatlayınız.
20. Her kompakt metrik uzayın aynı zamanda tam olduğunu ispatlayınız. Bu önermenin tersinin (tam $\implies$ kompakt) neden her zaman doğru olmadığını $\mathbb{R}$ uzayı üzerinden bir örnekle açıklayınız.
21. $[0, 1]$ aralığı üzerinde $d(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx$ metriği tanımlansın. $C[0, 1]$ uzayının bu metrik altında neden tam olmadığını bir Cauchy dizisi inşa ederek gösteriniz.
22. $f : X \rightarrow Y$ sürekli bir fonksiyon ve $K \subset X$ kompakt bir küme olsun. $f(K)$ görüntüsünün Y içinde kompakt olduğunu ispatlayınız.
23. X kompakt bir metrik uzay ise, her sürekli $f : X \rightarrow Y$ fonksiyonunun aynı zamanda düzgün sürekli olduğunu ispatlayınız.
24. $f(x) = \frac{1}{x}$ fonksiyonunun $(0, 1)$ aralığında sürekli olduğu halde neden düzgün sürekli olmadığını gösteriniz.
25. X kompakt, Y bir metrik uzay ve $f : X \rightarrow Y$ birebir, örten ve sürekli olsun. f^{-1} fonksiyonunun sürekli olduğunu ispatlayınız.
26. $f : X \rightarrow Y$ fonksiyonunun $a \in X$ noktasında sürekli olması için gerek ve yeter şartın, $x_n \rightarrow a$ olan her dizi için $f(x_n) \rightarrow f(a)$ olması gerektiğini gösteriniz.
27. Bir metrik uzayda her kompakt kümenin kapalı ve sınırlı olduğunu ispatlayınız.

28. $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olsun. f 'nin $[0, 1]$ üzerinde maksimum ve minimum değerlerine ulaştığını kompaktlık kavramını kullanarak ispatlayınız.
29. Sürekli fonksiyonlardan oluşan bir (f_n) dizisi f fonksiyonuna düzgün yakınsıyorsa, f 'nin de sürekli olduğunu ispatlayınız.
30. Kompaktlık ve tamlık arasındaki ilişkiyi vererek $\mathbb{R}$ 'nin kompakt olup olmadığını gösteriniz.
31. Metrik uzaylarda yakınsak bir dizinin limiti tektir.
32. Tam metrik uzayların kapalı alt uzayları tam mıdır? Gösteriniz.
33. Ayırık metrik uzayın her alt kümesi hem açık hem kapalıdır, gösteriniz.
34. $\mathbb{R}$ standart uzayının $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, (a, b)$ alt kümelerinin kompaktlığını inceleyiniz.
35. (X, τ) kompakt topolojik uzay, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon ise bu fonksiyonun max ve min değerlerini aldığını gösteriniz.
36. Herhangi bir $f : (X, \mathcal{P}(X)) \rightarrow (Y, \tau)$ fonksiyonunun sürekli olup olmadığını inceleyiniz.
37. Ayırık metrik uzayda açık yuvar, kapalı yuvar ve yuvar yüzeyini bulunuz.
38. $X = \mathbb{R}$ olmak üzere, aşağıdaki fonksiyonların her birinin metrik aksiyonlarını sağlayıp sağlamadığını ispatlayınız:
 - $d_1(x, y) = \sqrt{|x - y|}$
 - $d_2(x, y) = |x^3 - y^3|$
 - $d_3(x, y) = \frac{|x - y|}{1 + |x - y|}$
39. (X, d) bir metrik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. $x \in X$ noktasının A kümesinin bir yığılma noktası olması için gerek ve yeter şartın, terimleri $A \setminus \{x\}$ kümesinde olan ve x noktasına yakınsayan bir (x_n) dizisinin varlığı olduğunu gösteriniz.
40. $C[0, 1]$ sürekli fonksiyonlar uzayında $d(f, g) = \int_0^1 |f(t) - g(t)| dt$ fonksiyonunun bir metrik olduğunu gösteriniz. Bu metriğin, supremum metriği $d_\infty(f, g) = \max |f(t) - g(t)|$ ile denk olup olmadığını tartışınız.
41. (X, d) metrik uzayında bir A alt kümesinin yoğun (dense) olması için gerek ve yeter şartın, X 'teki her boş olmayan açık kümenin A ile kesişmesi olduğunu kanıtlayınız.
42. (X, d) bir metrik uzay ve sabit bir $A \subset X$ kümesi için $f(x) = d(x, A) = \inf\{d(x, a) : a \in A\}$ şeklinde tanımlanan fonksiyonun X üzerinde düzgün sürekli (uniformly continuous) olduğunu $|f(x) - f(y)| \leq d(x, y)$ eşitsizliğini kurarak ispatlayınız.

43. $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$ bir fonksiyon olsun. f fonksiyonunun sürekli olması için gerek ve yeter şartın, Y uzayındaki her V açık kümesi için $f^{-1}(V)$ kümesinin X uzayında açık olması gerektiğini ispatlayınız.
44. Bir metrik uzayda her Cauchy dizisinin sınırlı olduğunu ispatlayınız. Bu sonucun tersinin (her sınırlı dizinin Cauchy olması) neden her zaman doğru olmadığını $\mathbb{R}$ üzerindeki alışılmış metrikte bir örnekle açıklayınız.
45. (X, d_X) ve (Y, d_Y) iki metrik uzay, $f : X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun.
- f 'nin Lipschitz sürekli, düzgün sürekli ve sürekli olmalarının tanımlarını metrikler cinsinden ifade ediniz.
 - Lipschitz Süreklilik $\implies$ Düzgün Süreklilik $\implies$ Süreklilik gerektirmelerini ispatlayınız.
 - $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ fonksiyonunun alışılmış metrikte sürekli olduğunu fakat düzgün sürekli olmadığını göstererek hiyerarşinin tersinin her zaman doğru olmadığını kanıtlayınız.
46. $\mathbb{R}^n$ üzerinde $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ve $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ için

$$d_1(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| \quad \text{ve} \quad d_\infty(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$$

metriklerini ele alalım. Buna göre;

$$d_\infty(x, y) \leq d_1(x, y) \leq n \cdot d_\infty(x, y)$$

eşitsizliğini ispatlayınız.

47. $C^1[0, 1] = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ türevlenebilir ve türevi sürekli fonksiyon} \}$ olmak üzere;

$$p(f, g) = |f(0) - g(0)| + \sup_{t \in [0, 1]} |f'(t) - g'(t)|$$

fonksiyonunun $C^1[0, 1]$ üzerinde bir metrik olduğunu gösteriniz.

48. (X, d) bir metrik uzay ve $f : \mathbb{N} \rightarrow X$ bir fonksiyon olsun. O zaman f 'in $\mathbb{N}$ üzerinde düzgün sürekli olduğunu ispatlayınız. ($\mathbb{N}$ üzerinde mutlak değer metriğini alınız.)
49. Herhangi bir (X, d) metrik uzayında yakınsak her (x_n) dizisinin bir Cauchy dizisi olduğunu gösteriniz.
50. Herhangi bir metrik uzayda her Cauchy dizisinin sınırlı olduğunu gösteriniz.
51. $d_\infty(f, g) = \sup_{t \in [0, 1]} |f(t) - g(t)|$ olmak üzere $(C[0, 1], d_\infty)$ uzayında $n \in \mathbb{N}$ için

$$x_n(t) = \frac{nt}{1 + n^2 t^2}$$

şeklinde tanımlı (x_n) dizisinin yakınsaklığını araştırınız.

52. $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesinin $\mathbb{R}$ 'de (mutlak değer metriğine göre) tam olmadığını gösteriniz.

53. Bir (X, d_1) metrik uzayı ile X kümesi üzerinde

$$d_2(x, y) = \frac{d_1(x, y)}{1 + d_1(x, y)}$$

metriği verilsin.

a) X içindeki bir (x_n) dizisinin d_1 metriğine göre Cauchy olması için gerek ve yeter şartın d_2 metriğine göre Cauchy olması olduğunu gösteriniz.

b) (X, d_1) uzayının tam olması için gerek ve yeter şartın (X, d_2) uzayının tam olması olduğunu gösteriniz.

54. (X, d) bir metrik uzay ve $(x_n), (y_n) \subset X$ olsun. $x_n \rightarrow x$ ve $y_n \rightarrow y$ ise $d(x_n, y_n) \rightarrow d(x, y)$ olduğunu ispatlayınız.

55. (X, d) bir metrik uzay olsun. X 'deki herhangi bir (x_n) Cauchy dizisi için $\sum_{n=1}^{\infty} d(x_n, x)$ serisi yakınsak olacak şekilde bir $x \in X$ noktası bulunabiliyorsa, (X, d) metrik uzayının tamlığı hakkında ne söylenebilir?

56. (X, d) herhangi bir metrik uzay olsun. d metriğinden sınırlı bir metrik üretilir mi?

57. Aşağıda verilen küme ve işlemlerin birer reel vektör uzayı oluşturup oluşturmadığını vektör uzayı aksiyomlarını kullanarak gösteriniz:

- $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - y + z = 0\}$ kümesi, $\mathbb{R}^3$ üzerindeki standart toplama ve skalerle çarpma işlemleri ile birlikte.
- $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ birim yuvar kümesi, $\mathbb{R}^2$ üzerindeki standart toplama ve skalerle çarpma işlemleri ile birlikte.