

Matematik Analiz I Çalışma Soruları

Metin Turgay

October 26, 2025

Bölüm 1

Çalışma Soruları

1. Aşağıdaki fonksiyonların tanım kümelerini bulunuz.

(a) $f(x) = \sqrt{x-2} + \sqrt{4-x}$

(b) $f(x) = \sqrt[3]{\frac{2-x}{x^2-9}}$

(c) $f(x) = \frac{2-x}{x^2-9}$

(d) $f(x) = \sqrt{\frac{2-x}{x^2-9}}$

(e) $f(x) = \frac{x}{\|x\|}$

Aşağıdaki fonksiyonların en geniş tanım kümelerini bulunuz.

(a) $f(x) = \sqrt{6+5x-x^2}$

(b) $f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{3-x}$

(c) $f(x) = \sqrt{1-\sqrt{9-x^2}}$

(d) $f(x) = \sqrt{4-2\sqrt{1+x^2}}$

(e) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{|x|-x}}$

(f) $f(x) = \log |1-x^2|$

(g) $f(x) = \sqrt{\arcsin(\log_2 x)}$

2. -1 ve 2 sayılarının $f(x) = \frac{2x-1}{x+4}$ rasyonel fonksiyonunun görüntü kümesinde olup olmadığını araştırınız.

3. Aşağıdaki fonksiyonların tanım ve görüntü kümelerini bulunuz.

(a) $f(x) = \sqrt{x-2}$

(b) $f(x) = x^2 - 4x + 5$

(c) $f(x) = x^3 - 1$

- (d) $f(x) = \sqrt{\frac{3-x}{x+1}}$
- (e) $f(x) = \frac{x^2-3x+4}{x^2-3x+2}$
4. $f(x) = \frac{x}{x-2}$ olsun. $(f \circ g)(x) = x$ olacak şekilde bir $y = g(x)$ fonksiyonu bulunuz.
5. $f(x) = 2x^3 - 4$ olsun. $(f \circ g)(x) = x + 2$ olacak şekilde bir $y = g(x)$ fonksiyonu bulunuz.
6. $f(x) = \sqrt{x - \|x\|}$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.
7. $f(x) = 2|x - 1| + 3|x + 1|$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.
8. $e^{5-3x} = 10$ denklemini çözünüz.
9. $y = \ln x$ fonksiyonunun grafiğinden yararlanarak $y = \ln |x|$, $y = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$, $y = \ln(x - 2) - 1$ fonksiyonlarının grafiklerini çiziniz.
10. $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ eşitliğinin varlığını gösteriniz. Buradan $\log_a b = \frac{\ln b}{\ln a}$ eşitliği yazılabilir mi?
11. Aşağıda verilen fonksiyonların tanım kümelerini bulunuz.
- (a) $f(x) = \ln(x^2 - 9)$
- (b) $f(x) = \ln(x^2 - 2x)$
- (c) $f(x) = \ln(\sqrt{x - 4} + \sqrt{6 - x})$
- (d) $f(x) = \arcsin(\ln x)$
- (e) $f(x) = \log(1 - \log(x^2 - 5x + 16))$
- (f) $f(x) = \sqrt{\ln(x - 2)}$
12. $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ fonksiyonunun tek fonksiyon olduğunu gösteriniz.
13. Aşağıdaki fonksiyonların tersi için bir formül bulunuz.
- (a) $y = \ln(x + 3)$
- (b) $y = \frac{1+e^x}{1-e^x}$
14. $f(x) = \ln(4 - x^2)$ fonksiyonunun tanım ve görüntü kümesini bulunuz.
15. Aşağıdaki denklem ve eşitsizliklerin çözüm kümelerini bulunuz.
- (a) $\ln(\ln x) = 1$
- (b) $e^{2x+3} - 7 = 0$
- (c) $\ln x - \ln(x - 1) = 1$
- (d) $\ln x > -1$
- (e) $e^{2-3x} > 4$

16. f 'nin bir çift fonksiyon ve g 'nin bir tek fonksiyon olduğunu ve her ikisinin de bütün reel doğru $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı olduğunu varsayın. Aşağıdakilerden hangileri (tanımlı oldukları yerlerde) çifttir? tektir?
- (a) fg
 - (b) f/g
 - (c) g/f
 - (d) $f^2 = ff$
 - (e) $g^2 = gg$
 - (f) $f \circ g$
 - (g) $g \circ f$
 - (h) $f \circ f$
 - (i) $g \circ g$
17. Bir fonksiyon hem çift ve hem de tek olabilir mi? Cevabınızı açıklayın.
18. $f(x) = \sqrt{x}$ ve $g(x) = \sqrt{1-x}$ fonksiyonlarının grafiklerini
- (a) toplamlarının,
 - (b) çarpımlarının,
 - (c) her iki farklarını,
 - (d) her iki oranlarının grafikleri ile birlikte çiziniz.
19. $f(x) = x - 7$ ve $g(x) = x^2$ olsun. f ve g grafiklerini $f \circ g$ ve $g \circ f$ grafikleri ile birlikte çizin.
20. Aşağıdaki alıştırmalardaki bağıntıları türetmek için açı toplama formüllerini kullanın.
- (a) $\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin x$
 - (b) $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$
 - (c) $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$
 - (d) $\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos x$
 - (e) $\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$
 - (f) $\sin(A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$
 - (g) $\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$ bağıntısında $B = A$ alırsanız ne olur? Bu sonuç daha önceden bildiğiniz bir şeyle uyuyor mu?
 - (h) Açı toplama formüllerinde $B = 2\pi$ alırsanız ne olur? Sonuçlar daha önceden bildiğiniz bir şeylerle uyuyor mu?
21. Aşağıdaki alıştırmalarda, verilen büyüklüğü $\sin x$ ve $\cos x$ cinsinden ifade edin.

- (a) $\cos(\pi + x)$
- (b) $\sin(2\pi - x)$
- (c) $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$
- (d) $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$
- (e) $\sin\frac{7\pi}{12}$,nin değerini $\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right)$ 'ü hesaplayarak bulun.
- (f) $\cos\frac{11\pi}{12}$, nin değerini $\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}\right)$ 'ü hesaplayarak bulun.
- (g) $\cos\frac{\pi}{12}$ 'nin değerini bulun.
- (h) $\sin\frac{5\pi}{12}$ 'nin değerini bulun.

22. Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

- (a) $\lim_{x \rightarrow -7} (2x + 5)$
- (b) $\lim_{x \rightarrow 12} (10 - 3x)$
- (c) $\lim_{x \rightarrow 2} (-x^2 + 5x - 2)$
- (d) $\lim_{x \rightarrow -2} (x^3 - 2x^2 + 4x + 8)$
- (e) $\lim_{t \rightarrow 6} 8(t - 5)(t - 7)$
- (f) $\lim_{s \rightarrow 2/3} 3s(2s - 1)$
- (g) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+3}{x+6}$
- (h) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{4}{x-7}$
- (i) $\lim_{y \rightarrow -5} \frac{y^2}{5-y}$
- (j) $\lim_{y \rightarrow 2} \frac{y+2}{y^2+5y+6}$
- (k) $\lim_{x \rightarrow -1} 3(2x - 1)^2$
- (l) $\lim_{x \rightarrow -4} (x + 3)^{1984}$
- (m) $\lim_{y \rightarrow -3} (5 - y)^{4/3}$
- (n) $\lim_{z \rightarrow 0} (2z - 8)^{1/3}$
- (o) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{3}{\sqrt{3h+1}+1}$
- (p) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{5}{\sqrt{5h+4}+2}$
- (q) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3h+1}-1}{h}$
- (r) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{5h+4}-2}{h}$
- (s) $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x}-3}{x-9}$
- (t) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{4x-x^2}{2-\sqrt{x}}$
- (u) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x+3}-2}$
- (v) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x^2+8}-3}{x+1}$
- (w) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2+12}-4}{x-2}$

(x) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+2}{\sqrt{x^2+5}-3}$

Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

(a) $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\sin x}{x}$

(b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}$

(c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{bx}$

(d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\sin bx} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos ax}{x^2}$

(e) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a}$

(f) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$

(g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2}$

23. Aşağıdaki sorular için Sıkıştırma Teoreminden yararlanabilirsiniz.

(a) $-1 \leq x \leq 1$ için $\sqrt{5-2x^2} \leq f(x) \leq \sqrt{5-x^2}$ ise $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 'i bulun.

(b) Her x için $2-x^2 \leq g(x) \leq 2\cos x$ ise $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ 'i bulun.

(c) Sıfıra yakın bütün x değerleri için

$$1 - \frac{x^2}{6} < \frac{x \sin x}{2 - 2 \cos x} < 1$$

eşitsizliklerinin geçerli olduğu ispatlanabilir. Bu size

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{2 - 2 \cos x}$$

hakkında ne söyler? Yanıtınızı açıklayın.

(d) $-2 \leq x \leq 2$ için $y = 1 - (x^2/6)$, $y = (x \sin x)/(2 - 2 \cos x)$ ve $y = 1$ grafiklerini birlikte çizin. $x \rightarrow 0$ iken grafiklerin davranışını açıklayın.

24. $f(x) = 9x - 5$ olsun. Bir $\delta > 0$ sayısı bulunuz ki $|x - 1| < \delta$ olduğunda $|f(x) - 4| < \frac{1}{10}$ kalsın.

25. $(g(x) = 2x^2 + 3)$ olsun. Bir $\delta > 0$ sayısı bulunuz ki $|x| < \delta$ olduğunda $|g(x) - g(0)| < \frac{1}{2}$ olsun.

26. $f(x) = \frac{x}{x+2}$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. Oyle bir $\delta > 0$ bulunuz ki $|x - 1| < \delta$ olduğunda $|f(x) - \frac{1}{3}| < \varepsilon$ kalsın.

27. Aşağıdaki alıştırılarda fonksiyonlar hangi noktalarda sürekli değildirler? Hangi noktalarda, mümkünse, süreksizlikler kaldırılabilir, hangilerinde kaldırılamaz? Açıklayın.

(a) $y = \frac{1}{x-2} - 3x$

(b) $y = \frac{1}{(x+2)^2} + 4$

- (c) $y = \frac{x+1}{x^2-4x+3}$
- (d) $y = \frac{x+3}{x^2-3x-10}$
- (e) $y = |x-1| + \sin x$
- (f) $y = \frac{1}{|x|+1} - \frac{x^2}{2}$
- (g) $y = \frac{\cos x}{x}$
- (h) $y = \frac{x+2}{\cos x}$
- (i) $y = \csc 2x$
- (j) $y = \tan \frac{\pi x}{2}$
- (k) $y = \frac{x \tan x}{x^2+1}$
- (l) $y = \frac{\sqrt{x^4+1}}{1+\sin^2 x}$
- (m) $y = \sqrt{2x+3}$
- (n) $y = \sqrt[4]{3x-1}$
- (o) $y = (2x-1)^{1/3}$
- (p) $y = (2-x)^{1/5}$
28. $A, B \subset R, f : A \rightarrow R, g : B \rightarrow R$ fonksiyonlar verilmiş ve $f(A) \subset B$ olsun. f fonksiyonunu a noktasında, g fonksiyonu $f(a)$ noktasında sürekli olduğunda gof fonksiyonu da a noktasında süreklidir, ispatlayınız.
29. f fonksiyonu a noktasında sürekli olduğunda fonksiyonunun a noktasında sürekli olduğunu gösteriniz. $|f|$ sürekli olduğunda f sürekli olmak zorunda mıdır?
30. $A \subset R, f : A \rightarrow R$ ve $g : B \rightarrow R$ fonksiyonları $a \in A$ noktasında sürekli iseler,
- $$p = \max\{f, g\}, q = \min\{f, g\}$$
- fonksiyonları da a noktasında süreklidir, gösteriniz.
31. Aşağıdaki örneklerde limitleri bulun. Fonksiyonlar yaklaşılan noktalarda sürekli midirler?
- (a) $\lim_{x \rightarrow \pi} \sin(x - \sin x)$
- (b) $\lim_{t \rightarrow 0} \sin\left(\frac{\pi}{2} \cos(\tan t)\right)$
- (c) $\lim_{y \rightarrow 1} \sec(y \sec^2 y - \tan^2 y - 1)$
- (d) $\lim_{x \rightarrow 0} \tan\left(\frac{\pi}{4} \cos(\sin x^{1/3})\right)$
32. Aşağıdaki sorularda verilen noktada eğrinin teğet denklemini bulun. Eğriyi ve teğetini birlikte çizin.
- (a) $y = 4 - x^2, \quad (-1, 3)$
- (b) $y = (x-1)^2 + 1, \quad (1, 1)$

- (c) $y = 2\sqrt{x}$, $(1, 2)$
 (d) $y = \frac{1}{x^2}$, $(-1, 1)$
 (e) $y = x^3$, $(-2, -8)$
 (f) $y = \frac{1}{x^3}$, $(-2, -\frac{1}{8})$
33. Aşağıdaki alıştırmalarda, verilen noktada fonksiyonun grafiğinin eğimini bulun. O noktadaki teğetin denklemini yazın.
- (a) $f(x) = x^2 + 1$, $(2, 5)$
 (b) $f(x) = x - 2x^2$, $(1, -1)$
 (c) $g(x) = \frac{x}{x-2}$, $(3, 3)$
 (d) $g(x) = \frac{8}{x^2}$, $(2, 2)$
 (e) $h(t) = t^3$, $(2, 8)$
 (f) $h(t) = t^3 + 3t$, $(1, 4)$
 (g) $f(x) = \sqrt{x}$, $(4, 2)$
 (h) $f(x) = \sqrt{x+1}$, $(8, 3)$
34. Tanımı kullanarak, aşağıdaki alıştırmalardaki fonksiyonların türevlerini bulun. Sonra istenilen türev değerlerini bulun.
- (a) $f(x) = 4 - x^2$; $f'(-3), f'(0), f'(1)$
 (b) $F(x) = (x-1)^2 + 1$; $F'(-1), F'(0), F'(2)$
 (c) $g(t) = \frac{1}{t^2}$; $g'(-1), g'(2), g'(\sqrt{3})$
 (d) $k(z) = \frac{1-z}{2z}$; $k'(-1), k'(1), k'(\sqrt{2})$
 (e) $p(\theta) = \sqrt{3\theta}$; $p'(1), p'(3), p'(2/3)$
 (f) $r(s) = \sqrt{2s+1}$; $r'(0), r'(1), r'(1/2)$
35. Aşağıdaki alıştırmalarda, fonksiyonların türevlerini alın. Sonra fonksiyonun grafiği üzerinde belirtilen noktadaki teğetin denklemini bulun.
- (a) $y = f(x) = \frac{8}{\sqrt{x-2}}$, $(x, y) = (6, 4)$
 (b) $w = g(z) = 1 + \sqrt{4-z}$, $(z, w) = (3, 2)$
36. Aşağıdaki alıştırmalarda, türevlerin değerini bulun.
- (a) $s = 1 - 3t^2$ ise $\frac{ds}{dt} \Big|_{t=-1}$
 (b) $y = 1 - \frac{1}{x}$ ise $\frac{dy}{dx} \Big|_{x=\sqrt{3}}$
 (c) $r = \frac{2}{\sqrt{4-\theta}}$ ise $\frac{dr}{d\theta} \Big|_{\theta=0}$
 (d) $w = z + \sqrt{z}$ ise $\frac{dw}{dz} \Big|_{z=4}$
37. Aşağıdaki alıştırmalarda,

- (a) Verilen $y = f(x)$ fonksiyonunun $f'(x)$ türevini bulun.
- (b) $y = f(x)$ ile $y = f'(x)$ 'i farklı koordinat eksenleri kullanarak yanyana çizin ve aşağıdaki soruları yanıtlayın.
- (c) Hangi x değerlerinde, varsa, f' pozitif? Sıfır? Negatiftir?
- (d) Hangi x değer aralıklarında, varsa, x -arttıkça $y = f(x)$ fonksiyonu da artar, veya x -azaldıkça azalır? Bunun (c) şikkında bulduklarınızla ilişkisi nedir? (Bu ilişkiyi Bölüm 4'te daha yakından inceleyeceğiz.)
- $y = -x^2$
 - $y = -1/x$
 - $y = x^3/3$
 - $y = x^4/4$
38. $y = x^3$ eğrisinin negatif bir eğimi var mıdır? Varsa, nerede bulunur? Yanıtınızı açıklayın.
39. $y = 2\sqrt{x}$ eğrisinin yatay bir teğeti var mıdır? Varsa, nerede bulunur? Yanıtınızı açıklayın.
40. Aşağıdaki bağıntıların doğruluğunu gösteriniz.
- (a) $\sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$
- (b) $\cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
- (c) $\tan(\arccos x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$
- (d) $\tan(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$
- (e) $\arcsin(\cos x) = \frac{\pi}{2} - x$
- (f) $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$
- (g) $\arcsin x + \arcsin t = \arcsin (x\sqrt{1-t^2} + t\sqrt{1-x^2})$
- (h) $\arccos x + \arccos t = \arccos (xt - \sqrt{(1-x^2)(1-t^2)})$