Fonksiyonel Analiz I Uygulama Notları

Metin Turgay

November 16, 2022

Bu materyalde uygulama dersinde çözülecek olan sorular için gerekli temel kavramlar hatırlatılarak çözülmüş/çözülmemiş sorular çözümsüz olarak verilecektir.

Bu belgede fazlaca yazım hatası bulunmaktadır. Her okuduğunuzu dikkatle takip etmelisiniz. Bulduğunuz yazım hatalarını düzeltilemesi için

metin.turgay@selcuk.edu.tr

üzerinden bana iletebilirsiniz.

Emeği geçenler
Abdülkadir Eke
Sadettin Kurşun
Dilek Özer
Metin Turgay

Bölüm 1

Uygulama Dersi 1-2

Yoğunluğum dolayısıyla dökümanı tamamlayamadım. Aşağıda bugüne kadar uygulamalarda çözülmüş soruları meraklıları için ekliyorum.

1. Tüm reel sayıların kümesi üzerinde $d(x,y) = (x-y)^2$ ile tanımlı d fonksiyonu bir metrik tanımlar mı?

2. d, X üzerinde bir mektrik olsun.

   a. kd

   b. $k + d$

   ifadelerinin de X üzerinde bir metrik belirtebilmeleri için k sabitlerini bulunuz.

3. (X, d) bir metrik uzay ve $A, B \subset X$ olsun. O halde A ile B kümeleri arasındaki uzaklık

$$D(A, B) = \inf\{d(a, b) : a \in A, b \in B\}$$

   ile tanımlanır. Bu ifade X'in kuvvet kümeleri üzerinde bir metrik tanımlar mı?

4. (X, d_1) ve (Y, d_2) metrik uzayların $E = X \times Y$ kartezyen çarpımı bir çok yolla bir (E, d) metrik uzayına dönüştürülebilir. Örneğin $(x_1, x_2) \in X, (y_1, y_2) \in Y$ olmak üzere $d(x, y) = d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2)$ ile tanımlı d fonksiyonunun $X \times Y$ üzerinde bir metrik olduğunu gösteriniz.

5. $(X = \mathbb{R}^n)$ olmak üzere $x = (x_1, x_2, ..., x_n), y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in X$ için

$$d_2(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2}$$

   ile tanımlanan $d_2 : X \times X \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun X üzerinde bir metrik olduğunu gösterelim.

6. (X, d) bir metrik uzay olsun. $\forall x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ için

$$d(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$$

şeklinde tanımlanan d fonksiyonu $\mathbb{R}^2$ üzerinde bir metrik midir?

7. $a \in \mathbb{R}$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. $\mathbb{R}$ üzerindeki standart metriğe göre

   a. $B(a, \varepsilon)$
   b. $D(a, \varepsilon)$
   c. $S(a, \varepsilon)$

   kümelerini bulunuz.

8. $\varepsilon > 0$ bir reel sayı ve $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ olmak üzere $\mathbb{R}^2$ üzerindeki d_2 standart metriğine göre

   a. $B(a, \varepsilon)$
   b. $D(a, \varepsilon)$
   c. $S(a, \varepsilon)$

   kümelerini bulunuz.

9. $[a, b]$ kapalı ve sınırlı aralığı üzerinde tanımlı reel değerli ve sınırlı bütün fonksiyonların oluşturduğu $B[a, b]$ vektör uzayı üzerinde $\forall f, g \in B[a, b]$ için

$$\begin{aligned} d_\infty(f, g) &= |f - g|_\infty \\ &= \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in [a, b]\} \end{aligned}$$

ile tanımlanan dönüşüm bir metrik midir?

10. $d_2 : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ olmak üzere $d_2(n, m) = |n - m|^2$ kuralı ile verilen dönüşüm bir mektrik midir?

11. $\mathbb{R}^2$'de $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2)$ olmak üzere

$$d_\infty(x, y) = \text{maks}\{|x_1 - y_1|, |x_2, y_2|\}$$

metriğini göz önüne alalım. $B((0, 0), 1), D((0, 0), 1), S((0, 0), 1)$ kümelerini ifade edip, geometrik olarak gösteriniz.

12. $\mathbb{R}$ standart uzayında $\mathbb{Q}$ ve $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ kümelerinin yığılma noktalarını bulunuz.

13. $A = \{x \in \mathbb{R} : x^3 + 2x^2 - 3x \leq 0\}$ kümesinin $\mathbb{R}$'de kapalı olduğunu gösteriniz.

14. $d(x, y) = |x - y|$ olmak üzere $(\mathbb{Q}, d)$ metrik uzayı ve $S = \{x \in \mathbb{Q} : 2 < x^2 < 3\}$ kümesi verilsin. S kümesinin $\mathbb{Q}$ içinde kapalı ve sınırlı olduğunu fakat kompakt olmadığını gösteriniz.

15. $f : X \to \mathbb{R}$ bir sürekli fonksiyon, X metrik uzay olsun. $Z(f) = \{p \in X : f(p) = 0\}$ kümesinin kapalı olduğunu gösteriniz.

16. (X, d) bir metrik uzay $E \subset X$ boştan farklı bir küme olsun. $x \in X$ için X'den E'ye uzaklığı

$$\rho_E(x) = \inf_{z \in E} d(x, z)$$

olarak tanımlayalım.

   a. $\rho_E(x) = 0 \iff x \in \overline{E}$ olduğunu gösteriniz.

   b. ρ_E fonksiyonunun X üzerinde düzgün sürekli olduğunu gösteriniz.

17. $\ell_1 = \{(x_k) : \sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k| < \infty, x_k \in \mathbb{F}\}$ olmak üzere $(a_n) = \dfrac{2^n x^n}{3^n}$ dizininin hangi $x \in \mathbb{R}$ değerleri için ℓ_1 uzayına ait olduğunu bulunuz.