T.C.

SELÇUK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÇOK DEĞİŞKENLİ EXPONANSİYEL SAMPLING KANTOROVICH SERİLERİ VE YAKINSAKLIK ÖZELLİKLERİ

Metin TURGAY

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Haziran - 2021

KONYA

TEZ KABUL VE ONAYI

Metin TURGAY tarafından hazırlanan "**ÇOK DEĞİŞKENLİ EXPONANSİYEL SAMPLING KANTOROVICH SERİLERİ VE YAKINSAKLIK ÖZELLİKLERİ**" adlı tez çalışması 10/06/2021 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	**İmza**
Başkan **Prof. Dr. Ali ARAL**	________________
Danışman **Doç. Dr. Tuncer ACAR**	________________
Üye **Doç. Dr. Tuncer ACAR**	________________
Üye **Dr. Öğr. Üyesi Dilek SÖYLEMEZ ÖZDEN**	________________

Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Prof. Dr. Sait GEZGİN
FBE Müdürü

Bu tez çalışması TÜBİTAK tarafından 119F191 nolu proje ile desteklenmiştir.

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

Metin TURGAY

Tarih: 10/06/2021

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ÇOK DEĞİŞKENLİ EXPONANSİYEL SAMPLING KANTOROVICH SERİLERİ VE YAKINSAKLIK ÖZELLİKLERİ

Metin TURGAY

Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Tuncer ACAR

2021, 104 Sayfa

Jüri
Prof. Dr. Ali ARAL
Doç. Dr. Tuncer ACAR
Dr. Öğr. Üyesi Dilek SÖYLEMEZ ÖZDEN

Bu çalışma beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş için ayrılmıştır. İkinci bölümde ihtiyaç duyulacak temel notasyonlar ve kavramlar tanıtılmıştır. Üçüncü bölümde Weierstrass yaklaşım teoremi, Bernstein polinomları ve formları tanıtılmış, bunlar hakkında genel teoremler ve ispatlar verilmiştir. Dördüncü bölümde ilk kısımda sampling serilerine giriş yapılmış ve formları tanıtılmış, ikinci kısımda ise exponansiyel sampling serileri tanıtılmış ve genel teoremlere ispatları ile yer verilmiştir. Beşinci bölüm ana sonuçlar için ayrılmıştır. Beşinci bölümün ilk kısmında çok değişkenli exponansiyel sampling Kantorovich serileri tanıtılmış ve elde edilmiş teoremlere ispatları ile yer verilmiştir. İkinci kısımda ise çok değişkenli exponansiyel sampling Kantorovich serilerinde aralıkların keyfi olarak kabul edilmesiyle oluşturulan genelleştirilmiş çok değişkenli exponansiyel sampling Kantorovich serileri tanıtılmış ve teoremleri verilmiştir. Son olarak, çok değişkenli exponansiyel sampling serilerinin belirlenen şartları sağladığı gösterilmiş çekirdekler ile fonksiyonlara yaklaşımını gösteren örnekler verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Exponansiyel sampling serileri, exponansiyel sampling Kantorovich serileri, sampling serileri, sampling Kantorovich serileri, Weierstrass yaklaşım teoremi.

ABSTRACT

Ms THESIS

MULTIVARIATE EXPONENTIAL SAMPLING KANTOROVICH SERIES AND ITS CONVERGENCE PROPERTIES

Metin TURGAY

THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF SELÇUK UNIVERSITY
THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE

Advisor: Assoc. Prof. Dr. Tuncer ACAR

2021, 104 Pages

Jury
Prof. Dr. Ali ARAL
Assoc. Prof. Dr. Tuncer ACAR
Asst. Prof. Dr. Dilek SÖYLEMEZ ÖZDEN

This study consists of five chapters. The first chapter is devoted to introduction. In the second chapter, basic notations and concepts that will be needed are introduced. In the third chapter, Weierstrass approximation theorem, Bernstein polynomials and their forms are introduced and general theorems about them given with proofs. In the fourth chapter, firstly the sampling series and their forms are introduced. In the second part, exponential sampling series introduced and general theorems with their proofs are given. The fifth chapter is devoted to the main results. In the first part of the fifth chapter, multivariate exponential sampling Kantorovich series are introduced and obtained theorems are given with their proofs. In the second part, generalized multivariate exponential sampling Kantorovich series formed by assuming the intervals arbitrarily in multivariate exponential sampling Kantorovich series are introduced and their theorems are given. Finally, examples of approximation to functions are given with the kernels which are satisfying specified conditions of exponential sampling Kantorovich series.

Keywords: Exponential sampling series, exponential sampling Kantorovich series, sampling series, sampling Kantorovich series, Weierstrass approximation theorem.

ÖNSÖZ

Çalışmalarım süresince bilgi ve tecrübelerini her daim bana aktaran, desteğini en başından itibaren hissettiren değerli hocam, Sayın Doç. Dr. Tuncer ACAR'a, saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Tüm hayatım boyunca beni destekleyen, her zaman bir adım ileriye gitmemde bana itici kuvvet olarak destek olan sevgili aileme minnet ve teşekkürlerimi sunarım.

Birlikte birçok çalışmayı yürüttüğümüz değerli çalışma arkadaşım Sadettin KURŞUN'a, çalışmam süresince yaşadığım her türlü sıkıntıda bana destek olmak için yanımda bulunan sevgili dostlarım Ekrem BAŞARI'ya ve Merve Gökçe ŞAVKLI'ya teşekkürlerimi sunarım.

Metin TURGAY
KONYA-2021

İÇİNDEKİLER

ŞEKİL LİSTESİ

TABLO LİSTESİ

Tablo **Sayfa**

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

$\mathbb{N}$	:	doğal sayılar kümesi
$\mathbb{N}_0$	:	pozitif doğal sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	:	tam sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	:	reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	:	kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{R}_+$	:	pozitif reel sayılar kümesi
$\mathbb{N}^n$	:	n değişkenli doğal sayılar kümesi
$\mathbb{N}_0^n$	:	n değişkenli pozitif doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}^n$	:	n değişkenli reel sayılar kümesi
$\mathbb{Z}^n$	:	n değişkenli tam sayılar kümesi
$\Vert\cdot\Vert_\infty$	:	supremum normu
$\Vert\cdot\Vert_p$	:	p normu
$\mathcal{P}(X)$	:	X kümesinin kuvvet kümesi
$P(I)$	:	$I \subseteq \mathbb{R}$ aralığında tanımlı polinomlar kümesi
$C(I)$	:	$I \subseteq \mathbb{R}$ aralığında sürekli ve supremum normuna göre sınırlı fonksiyonlar uzayı
$\mathcal{C}(I)$	:	$I \subseteq \mathbb{R}$ aralığında log-düzgün sürekli ve supremum normuna göre sınırlı fonksiyonlar uzayı
$C^{(r)}(I)$	:	$C(I)$ uzayına ait $r \in \mathbb{N}_0$ olmak üzere r-ninci türevi de $C(I)$ uzayına ait fonksiyonlar uzayı
$C_c(I)$	:	$C(I)$ uzayına ait kompakt desteğe sahip fonksiyonlar uzayı
$C_c^{(r)}(I)$	:	$C^{(r)}(I)$ uzayına ait kompakt desteğe sahip fonksiyonlar uzayı
$M(I)$	:	$I \subseteq \mathbb{R}$ kümesine ait Lebesgue ölçülebilir fonksiyonlar uzayı
$L^\infty(I)$	:	$I \subseteq \mathbb{R}$ kümesine ait sınırlı fonksiyonlar uzayı
$L^p(I)$	:	$1 \leq p < +\infty$ için $I \subseteq \mathbb{R}$ kümesindeki Lebesgue ölçülebilir ve p-integrallenebilir fonksiyonlar uzayı
e_i	:	$e_i(x) = x^i, i \in \mathbb{N}$, test fonksiyonları
$L_n(f;\cdot)$	:	f fonksiyonunun L lineer operatörü altındaki görüntüsü
$(B_n f)(\cdot)$	:	f fonksiyonunun Bernstein operatörü altındaki görüntüsü
$(K_n f)(\cdot)$	:	f fonksiyonunun Kantorovich operatörü altındaki görüntüsü
$(S_w^\varphi f)(\cdot)$	:	f fonksiyonunun exponansiyel sampling serisi altındaki görüntüsü
$(I_w^\chi f)(\cdot)$	:	f fonksiyonunun exponansiyel sampling Kantorovich serisi altındaki görüntüsü
$\overline{X}$	:	X kümesinin kapanışı

Kısaltmalar

ÇDESKS	:	Çok değişkenli exponansiyel sampling Kantorovich serileri
ÇDGESKS	:	Çok değişkenli genelleştirilmiş exponansiyel sampling Kantorovich serileri
ÇDGSKS	:	Çok değişkenli genelleştirilmiş sampling Kantorovich serileri
ÇDGSS	:	Çok değişkenli genelleştirilmiş sampling serileri
ESS	:	Exponansiyel sampling serileri
ESKS	:	Exponansiyel sampling Kantorovich serileri
GSS	:	Genelleştirilmiş sampling serileri

1. GİRİŞ

Yaklaşım teori hemen hemen her mühendislik ve fizik alanında uygulamalara sahip olup bu çalışmalarda yaklaşımın hızını arttırmak ve yaklaşımın doğal sonucu olan hata miktarını azaltmakta kritik bir rol oynamaktadır. Yaklaşım teorisinin en büyük çalışma alanlarından biri olan lineer pozitif operatörler dizisi ile yaklaşım teorisinde yapılan çalışmalarda bu amaç doğrultusunda Chebshev sistemine ait fonksiyonların ilgili lineer pozitif operatörler dizisi tarafından korunması şartı ile yaklaşımlar elde edilmesi hedeflenmektedir (Cárdenas-Morales ve ark., 2011; Gonska ve ark., 2009; King, 2003).

Topolojik bir uzayda, her bir elemanın uzaya ait yoğun bir alt uzayın elemanlarından oluşturulan dizinin yakınsadığı nokta olarak ifade edilebileceği gerçeğinden yola çıkarak Karl T. W. Weierstrass (1885), $\mathbb{R}$'nin kompakt alt kümeleri üzerinde tanımlı polinomlar uzayı $P([a,b])$'nin, $[a,b]$ aralığı üzerinde tanımlı sürekli fonksiyonlar uzayı $C([a,b])$'de yoğun olduğunu göstermiş ve böylece kompakt kümeler üzerinde tanımlı sürekli her fonksiyona bir $(p_n(x))$ polinomlar dizisi ile düzgün yakınsanabileceğini ifade ve ispat etmiştir (DeVore ve Lorentz, 1993). Verildiği dönem itibariyle oldukça dikkat çeken bu teorem devrin ileri gelen matematikçileri tarafından çokça çalışılmış ve farklı ispat metodları verilmiştir. Bernstein'ın verdiği ispata kadar verilen ispatların birçoğu topolojik gerçeklere dayanmaktadır. Sergei N. Bernstein (1912), Weierstrass teoreminin ispatını binom açılımından yararlanarak tanımladığı bugün kendi adıyla anılan polinomlar yardımıyla vermiştir. Bernstein polinomları, $x \in [0,1], n \in \mathbb{N}$ ve f, $[0,1]$ üzerinde sınırlı bir fonksiyon olmak üzere

$$(B_n f)(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right) \tag{1.1}$$

olarak tanımlanmıştır. Bernstein polinomları $[0,1]$ üzerinde sürekli f fonksiyonuna düzgün olarak yakınsamaktadır. Bernstein'ın verdiği bu ispat, basitliğinin getirdiği anlaşılabilirlik ile birlikte araştırmacılar tarafından en kullanışlı ispat olarak kabul görmüştür. Her ne kadar zamanının en popüler ispatı olsada, sanayide bulduğu uygulama alanlarından önce önemi yeteri kadar anlaşılamamıştır. Paul de Faget'in Citroën firmasının ve Pierre Bézier'in Renault firmasının endüstriyel dizaynlarında Bernstein polinomlarını kullanması ile matematikçilerin popüler çalışma konusu haline gelmiştir (Bézier, 1966, 1967; de Casteljau, 1993). Tekrar yoğun olarak çalışılmaya başlandıktan sonra polinom üzerinde bulunan kısıtlardan kaçınarak yeni yaklaşım metodlarının nasıl sunulabileceği matematikçileri yeni problemlere yöneltmiştir. Kapalı ve sınırlı aralık yerine sınırsız bir aralık olması durumunda, yaklaşılan fonksiyonun sürekli değil de Riemann integrallenebilir veya Lebesgue integrallenebilir olması durumunda yaklaşım metodlarının nasıl olabileceği üzerine çalışmalar yapılmıştır (Szász, 1950; Durrmeyer, 1967; Lupas ve Müller, 1967). Leonid Vitalyeviç Kantorovich (1930), Riemann integrallenebilir fonksiyonlara yaklaşım metodu sunmak için, Bernstein polinomlarında fonksiyonların k/n noktalarındaki değerleri yerine $\left[\frac{k}{n+1}, \frac{k+1}{n+1}\right]$ aralığı üzerindeki $(n+1) \int\limits_{k/n}^{(k+1)/n} f(u)du$ ortalama değerlerini kullanarak bugün kendi adıyla anılan

$$(K_n f)(x) = (n+1) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \int\limits_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}} f(t)dt \tag{1.2}$$

Kantorovich polinomlarını tanımlamıştır. Bernstein polinomlarında, sürekli f fonksiyonunun k/n noktalarındaki değerlerinin hesaplanamaması durumunda, f fonksiyonunun (süreksiz dahi olsa) $[0,1]$'in alt aralıklarındaki ortalama değerleri alınarak, f fonksiyonu polinomsal olarak ifade edilebilmektedir (Altomare ve Campiti, 1994). $(K_n f)$ operatörler dizisi, $(n+1)$-inci Bernstein polinomlarına sağdan anti türev, soldan türev operatörünün uygulanması ile, $D \circ B_{n+1} \circ I$, yazılabilmektedir. Uygulanan fonksiyonun sürekli olması durumunda, Bernstein polinomlarına kıyasla daha yaklaşık bir sonuç vermektedir. Bernstein operatörleri yapısındaki basitlik sayesinde gelen sinyallerin sürekli olması durumunda daha yaygın bir metod iken Kantorovich operatörleri gelen sinyallerin süreksiz (ancak sayılabilir çoklukta) olması durumunda tercih edilen yaklaşım metodudur. Kantorovich operatörleri sismik hareketler altındaki binaların davranışlarının belirlenmesinde, biyomedikal görüntülerin iyileştirilmesinde, tıbbi tanıların patolojik açıdan verilmesinin kolaylaştırılmasında vb. alanlarda günümüz teknolojisinde sıklıkla kullanılmaktadır (Costarelli ve Vinti, 2016; Asdrubali ve ark., 2018; Costarelli ve ark., 2020). Bernstein polinomları kompakt aralıklarda yaklaşım metodu iken yaklaşımı sınırsız aralıklarda yapmanın bir yöntemi sampling serileridir.

Sampling teori, birçok bilim ve mühendislik dalında kullanılan en önemli matematiksel tekniklerden biridir. Sampling teorideki en temel sonuçlardan biri, eğer f sinyal fonksiyonu bir $w > 0$ için $[-\pi w, \pi w]$ aralığında bant sınırlı ise her $t \in \mathbb{R}$ için $k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $f(k/w)$ örnek değerleri kullanılarak fonksiyonun

$$f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f\left(\frac{k}{w}\right) \frac{\sin \pi (wt-k)}{\pi (wt-k)} \tag{1.3}$$

formülü ile tamamen yeniden inşa edilebileceğini söyler. Burada alınan $1/w$ oranı bu fonksiyonun inşası için gerekli sampling değerleri arasındaki minimum orandır. Bu oran sampling teorisinin telgraf ile bağlantısını keşfeden H. Nyquist'e ithaf edilerek "Nyquist oranı" olarak adlandırılmaktadır (Nyquist, 1928). Bu gerçeği, Whittaker (1915); Kotel'nikov (1933) ve Shannon (1949) birbirlerinden bağımsız olarak verdiğinden literatürde Whittaker-Kotel'nikov-Shannon (WKS) teoremi olarak adlandırılmaktadır. (1.3) formülünde kullanılması beklenen örnek değerler sadece geçmişten değil aynı zamanda gelecektendir. Fakat pratikte, gelecekten sinyal kullanmak mümkün olmamakla birlikte t_0'ı şimdiki zaman kabul edersek $f(t)$ için sadece $t < t_0$ değerlerinin bilinmesi mümkündür. Burada akıllara ilk gelen soru ise sadece geçmişten örnek değerler kullanılarak bir f fonksiyonunun yeniden inşa edilebilip edilemeyeceğidir. Bu soruya bir cevap şu şekilde verilmiştir: $f, [-w\pi, w\pi]$ aralığında bant sınırlı ise, her $0 < T < 1$ için $a_{k_n} \in \mathbb{R}$ katsayıları bulunabilir öyleki örnek değer olarak $t_0 - T/w, t_0 - 2T/w, ...$, alınarak

$$f(t_0) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} a_{k_n} f\left(t_0 - \frac{kT}{w}\right), \quad (t_0 \in \mathbb{R}) \tag{1.4}$$

ile f'nin tek inşası elde edilebilir (Butzer ve Stens, 1993). Wainstein ve Zubakov (1962), (1.4) denkleminin, $0 < T < 1/3$ durumunda $a_{k_n} \approx (-1)^{k+1}\binom{n}{k}$ olduğunu gösterdiler. Brown (1972), T nin aralığını $a_{k_n} \equiv (-1)^{k+1}\binom{n}{k}(\cos\pi T)^k$ katsayısı için $0 < T < 1/2$'ye genişletmiştir (burada katsayı T parametresine bağlı). Splettstößer (1980, 1981)'de, (1.4) denkleminin $0 < T < \frac{1}{\pi}\arccos\left(-\frac{1}{8}\right) = 0.5399...$ için $t_0 \in \mathbb{R}$'de düzgün olarak sağlandığını göstererek bu sonucu daha da genişletmiştir. Bu alanın daha detaylı tarihsel gelişimi için, de Bruijn (1973); Luke (1978); Splettstößer (1983); Butzer ve ark. (1988); II (1991); Butzer ve Stens (1992) referansları incelenebilir. Burada f sinyal fonksiyonunun bant sınırlı olması şartı oldukça kısıtlayıcı bir hipotezdir. Gerçekten de, $f \in L^2(\mathbb{R})$ bant sınırlı fonksiyonu alınırsa, f, πw'nün tam bir exponansiyel tipi olarak kompleks düzleme genişletilebilir, yani oldukça düzgündür. Dahası, böyle bir fonksiyon aynı anda süre ile sınırlı olamaz ve pratikte ortaya çıkan ikinci sınıf fonksiyonlardır. Dolayısıyla, sonraki soru, mutlaka bant sınırlı olması gerekmeyen fonksiyonlar için tahminin gerçekleştirilip gerçekleştirilemeyeceğidir. Bu doğrultuda Splettstößer, $\mathbb{R}$'de $(r+1)$-inci türevi $f^{(r+1)}$'in düzgün sürekli ve sınırlı olduğu durumlarda her $0 < T < 1/2$ için

$$\begin{aligned}&\sup_{t\in\mathbb{R}} \left| f(t) - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1}\binom{n}{k}(\cos\pi T)^k f\left(t - \frac{kT}{w}\right)\right| \\ =&\mathcal{O}\left((1+\cos\pi T)^n w^{-r-1} + (\sin\pi T)^n \sqrt{w}\right), \quad (n, w \to +\infty)\end{aligned} \tag{1.5}$$

olduğunu göstermiştir.

Şimdiye kadar açıklanan tahmin prosedürlerindeki dezavantajlar:

(i) Sampling değerleri arasındaki oranlar $1/w$ Nyquist oranı yerine $0 < T < 1$ olmak üzere T/w'dir.

(ii) Tüm sampling noktaları t_0'a (veya t'ye) bağlıdır, yani serideki tüm örnek değerler t_0 değiştiğinde yeniden hesaplanmalıdır.

(iii) Bant sınırlı olması gerekmeyen fonksiyonlar incelenirken, örnek değer sayısı ile örnek değerler arasındaki oran uygun şekilde düzenlenmelidir.

(iv) Seri ile f'ye yaklaşımdaki (1.4) ve (1.5) denklemlerinde daha iyi sonuç alabilmek için n değeri arttırılmalıdır.

(v) Ne (1.4) ne de (1.5) denklemleri klasik Shannon serilerinde verilen konvolüsyon yapılarına sahip değildir.

Bu dezavantajlardan kaçınmak için Butzer ve ark. (1987), geçmişten alınan örneklerdeki değerler kullanılarak konvolüsyon serileri ile fonksiyonları yeniden oluşturmak için, bazı $0 < T_0 < T_1$'ler için $[T_0, T_1]$ aralığında kompakt desteğe sahip φ sürekli çekirdek fonksiyonu ve $\mathbb{R}$'de sınırlı bir f fonksiyonu ile

$$(S_w^{\varphi} f)(t) := \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{k}{w}\right) \varphi(wt-k), \quad (t \in \mathbb{R}) \tag{1.6}$$

olarak genelleştirilmiş sampling serilerini tanıttılar. Burada, en fazla $\frac{k}{w} \in \left(t - \frac{T_1}{w}, t - \frac{T_0}{w}\right)$ değerleri için $\varphi(wt-k) \neq 0$ sağlanmaktadır, yani (1.6) serileri için sadece sonlu sayıda geçmişten değer hesaplanmalıdır ve bu tüm f, w ve t'ler için böyle olacaktır. (1.6) serilerinde w'nün arttırılması sadece örnek değerler arasındaki oranın azaldığını değil, ayrıca f'nin bant sınırlı olması gerekmediğini de söylemektedir. Elbette $\varphi(wt-k)$'nın katsayıları t'ye bağlıdır, fakat φ'nin hesaplanması f'ye göre çok daha basit olacaktır.

Yaklaşım teorisinde Weierstrass yaklaşım teoremine verilmiş en bilinen kanıt Bernstein polinomları ile verilmiş kanıt olarak kabul edilmektedir. $(S_w^{\varphi} f)$ genelleştirilmiş sampling serileri $C(\mathbb{R})$ uzayına ait fonksiyonlara yaklaşım için oldukça zarif bir ispat vererek yaklaşım teorisinde de kendisine yer bulmuştur. (1.6) operatörlerinin lineer operatör dizilerinden farkı (S_w)'nun lineer operatörler ağından oluşmasıdır. Genelleştirilmiş sampling serileri sinyal işleme alanında önemli bir yere sahiptir (Butzer ve Stens, 2008; Angeloni ve ark., 2018). Genelleştirilmiş sampling serilerinin L^1 versiyonu, $f(k/w)$ sampling noktaları

$$w \int_{k/w}^{(k+1)/w} f(u)du$$

ortalama değeri ile değiştirilerek Bardaro ve ark. (2007) tarafından

$$(K_w^\chi f)(x) := \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left[w \int_{k/w}^{(k+1)/w} f(u)du \right] \chi(wx-k), \quad (x \in \mathbb{R}) \tag{1.7}$$

olarak verilmiştir. Genelleştirilmiş sampling serilerinin (1.6) inşasındaki fonksiyonlar seriyi $x \in \mathbb{R}$ için yakınsak kılan herhangi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyoları iken, Kantorovich tipi genelleştirilmiş sampling serilerindeki fonksiyonlar $L^1(\mathbb{R})$ uzayına ait fonksiyonlardır. (1.7) denkleminde verilmiş serilerin uygulama alanlarını genişletebilmek adına, Bardaro ve ark. (2007) k tamsayıları yerine monoton artan $(t_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ reel sayılar dizisini almış ve sonuçlarını daha genel halde elde etmişlerdir. Her $k \in \mathbb{Z}$ için $\Delta_k = t_{k+1} - t_k$, φ uygun bir çekirdek olmak üzere $(S_w)_{w>0}$ operatörleri

$$(S_w f)(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi(wx - t_k) \left[\frac{w}{\Delta_k} \int_{t_k/w}^{t_{k+1}/w} f(u)du \right], \quad (x \in \mathbb{R}) \tag{1.8}$$

olarak tanımlanmaktadır. Burada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu (1.8) serisini her $x \in \mathbb{R}$ için yakınsak yapan lokal integrallenebilir bir fonksiyondur. Kantorovich tipli genelleştirilmiş sampling serileri hakkında daha fazla bilgi ve uygulamaları için Angeloni ve ark. (2020); Cantarini ve ark. (2020); Acar ve ark. (2020) ve Costarelli ve ark. (2020) referansları incelenebilir.

(1.6) serilerinin uygulama alanlarında yakaladığı popülarite sonucu Butzer ve ark. (1990a) bu serideki fonksiyonları çok değişkenli fonksiyonlar olarak yeniden düzenlemiş ve Capri'de yapılan konferansta bu sonuçlarını sunmuşlardır. Çok değişkenli fonksiyonlar uzayı için verilen operatörler dizisi, $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ ve f çok değişkenli reel değerli bir fonksiyon olmak üzere,

$$(S_{\mathbf{w}}^\varphi f)(\mathbf{t}) := \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^n} \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^n} f\left(\frac{\mathbf{k}}{\mathbf{w}}\right) \varphi(\mathbf{wt} - \mathbf{k}), \qquad \left(\mathbf{t} \in \mathbb{R}^n,\ \mathbf{w} \in \mathbb{R}_+^n\right) \tag{1.9}$$

olarak verilmiştir. Aynı sunumda bu operatör için bazı nicel ve nitel teoremler ispat edilmiş ve uygulamalardan bahsedilmiştir. (1.9) serilerine ait daha fazla sonuç ve uygulama Butzer ve ark. (1990b) makalesinde bulunabilir.

Bardaro ve ark. (2007) tarafından (1.8) serileri için Orlicz uzaylarına ait tek değişkenli fonksiyonlar üzerinde elde edilmiş sonuçlar daha sonra Costarelli ve Vinti (2011) tarafından çok değişkenli fonksiyonlar uzayına taşınmıştır. Seriyi her $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ için yakınsak yapan lokal integrallenebilir $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için, $R_{\mathbf{k}}^w = \left[\frac{t_{k_1}}{w}, \frac{t_{k_1+1}}{w}\right] \times \left[\frac{t_{k_2}}{w}, \frac{t_{k_2+1}}{w}\right] \times \ldots \times \left[\frac{t_{k_n}}{w}, \frac{t_{k_n+1}}{w}\right]$ ve $i = 1, \ldots n$ için $\Delta_{k_i} = t_{k_i+1} - t_{k_i}$ ve $A_{\mathbf{k}} = \Delta_{k_1} \cdot \Delta_{k_2} \cdot \ldots \cdot \Delta_{k_n}$ olmak üzere

$$(S_w^\varphi f)(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^n} \varphi(w\mathbf{x} - t_{\mathbf{k}}) \left[\frac{w^n}{A_{\mathbf{k}}} \int_{R_{\mathbf{k}}^w} f(\mathbf{u})d\mathbf{u} \right], \qquad (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n) \tag{1.10}$$

olarak tanımlanan yeni operatörler ailesinin yakınsaklık sonuçları elde edildikten sonra, görüntü işleme alanında uygulamaları verilmiştir.

1980'lerde optik fizikçiler ve mühendisler tarafından ışık saçılması, yön, radyo-astronomi vb. ile ilgili belirli fenomenlerin incelenmesi için Mellin analizinde, $\mathbb{R}_+$ pozitif gerçel eksen üzerinde exponansiyel aralıklarla yerleştirilmiş örnek noktaları olan bir sampling serisi ile yapıcı bir matematiksel model inşası oluşturulmuştur. Bu yapı elektrik mühendisi/fizikçiler Ostrowsky ve ark. (1981), Bertero ve Pike (1991) ve Gori (1993) tarafından tanıtılmıştır ve Butzer ve Jansche (1998a) tarafından kanıtlanmıştır. $B^1_{c,T}$ uzayı $c \in \mathbb{R}, f \in C(\mathbb{R}_+), T \in \mathbb{R}_+$ olmak üzere $[-T, T]$ aralığında Mellin bant sınırlı $f \in X_c$ fonksiyonlarını göstersin. Exponansiyel sampling teoremi olarak adlandırılan bu temel teoremin ifadesi $c \in \mathbb{R}, w > 0$ için $f \in B^1_{c,\pi w}$ ise

$$x^c \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f\left(e^{k/w}\right) \operatorname{lin}_{c/w}\left(e^{-k} x^w\right) \tag{1.11}$$

serisi $\mathbb{R}_+$'da düzgün yakınsaktır ve

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f\left(e^{k/w}\right) \operatorname{lin}_{c/w}\left(e^{-k} x^w\right), \quad (x \in \mathbb{R}_+) \tag{1.12}$$

gösterimi mevcuttur şeklinde verilmiştir. Bu temel teorem, Fourier bant sınırlı fonksiyonları içeren klasik Shannon örnekleme formülünün bir Mellin versiyonunu temsil eder. Yakın zamanda Bardaro ve ark. (2016b) kanıtladığı gibi, aşikar olmayan bir fonksiyonun aynı anda Mellin ve Fourier bant sınırlı olamayacağının yanında, Mellin bant sınırlı fonksiyonlar ve Fourier bant sınırlı fonksiyonlar sınıfları ayrıktır. Bu, Fourier analizinden tamamen bağımsız bir exponansiyel sampling teorisi geliştirmenin önemine işaret etmiştir. Bu teori Bardaro ve ark. (2014) ve Bardaro ve ark. (2016a) makalelerinde geliştirilmiştir. Burada "lin_c" fonksiyonunun kullanımı teoriyi biraz zorlaştırmaktadır. Bu sorunu aşmak için, Bardaro ve ark. (2017) bant sınırlı olması gerekmeyen f sinyal fonksiyonunu yeniden inşa eden yeni bir operatörler ailesi tanıttılar. Bu tanıtılan operatörler ailesine exponansiyel sampling serileri denilmiş ve uygun bir φ çekirdek fonksiyonu, seriyi reel pozitif eksende mutlak yakınsak kılan herhangi bir $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ fonksiyonu ve her $w > 0$ için

$$\left(S_w^{\varphi} f\right)(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f\left(e^{k/w}\right) \varphi\left(e^{-k} x^w\right), \qquad (x \in \mathbb{R}_+) \tag{1.13}$$

olarak verilmiştir. Exponansiyel sampling serilerinin geliştirilmesinin ardından uygulama alanlarında tek değişkenli fonksiyonlardan fazlasına ihtiyaç duyulmuştur. Exponansiyel sampling serilerinin iki değişkenli fonksiyonlar uzayına genelleştirilmesi Bardaro ve ark. (2019) tarafından

$$\left(E_{\mathbf{w}}^{\varphi} f\right)(\mathbf{x}) := \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^2} f\left(e^{\frac{\mathbf{k}}{\mathbf{w}}}\right) \varphi\left(e^{-\mathbf{k}}\mathbf{x}^{\mathbf{w}}\right) \tag{1.14}$$
$$= \sum_{(k_1,k_2)\in\mathbb{Z}^2} f\left(e^{\frac{k_1}{w_1}}, e^{\frac{k_2}{w_2}}\right) \varphi\left(e^{-k_1}x_1^{w_1}, e^{-k_2}x_2^{w_2}\right)$$

olarak verilmiş ve sismik dalgalar üzerindeki uygulamaları incelenmiştir. (1.13) serilerin önemi özellikle exponansiyel aralıklı olan örneklere sahip (Mellin bant sınırlı olması gerekmeyen) bir sinyali yeniden yapılandırmamız gerektiğinde ortaya çıkar. Yani, $e^{k/w}$ noktalarındaki değerlerini kullanarak, bir sinyali yaklaşık olarak belirlemek için kullanışlı bir metod sağlar. Ancak pratikte $e^{k/w}$ noktalarında kesin örnek değerlere sahip olmak zordur. Bu zorluğun üstesinden gelebilmek için Angamuthu ve Bajpeyi (2020), genelleştirilmiş sampling Kantorovich operatörlerinden aldıkları ilhamla $f\left(e^{k/w}\right)$ yerine $\left[\frac{k}{w}, \frac{k+1}{w}\right]$ aralığında $f \circ e^{(\cdot)}$ fonksiyonunun ortalama değerini kullanarak exponansiyel sampling Kantorovich operatörlerini tanıtmışlardır. Yaklaşım operatörlerinin Kantorovich tipi genelleştirmeleri, Lebesgue integrallenebilir fonksiyonlara yaklaşım için kullanılabileceğinden teoride önemli bir yapıdır. Exponansiyel sampling Kantorovich operatörleri, uygun bir χ çekirdek fonksiyonu, $w > 0$ ve her $x \in \mathbb{R}_+$ için seriyi mutlak yakınsak kılan lokal integrallenebilir $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için

$$\left(I_w^{\chi} f\right)(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \chi\left(e^{-k}x^{w}\right) w \int_{\frac{k}{w}}^{\frac{k+1}{w}} f\left(e^{u}\right) du, \qquad (x \in \mathbb{R}_+) \tag{1.15}$$

olarak verilmiştir.

Bu tez çalışmasında, (1.15)'den aldığımız motivasyonla, exponansiyel sampling serilerinin uygulama alanlarını genişletebilmek, sinyal ve görüntü işleme alanlarındaki çok boyutluluğa çözüm olabilmek adına (1.15) operatörlerini çok değişkenli fonksiyonlar için tanımlayacağız. Çok değişkenli exponansiyel sampling Kantorovich operatörlerini, uygun bir φ çekirdek fonksiyonu, $w > 0$ ve seriyi mutlak yakınsak kılan lokal integrallenebilir $f : \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için

$$\left(E_{\mathbf{w},j}^{\varphi} f\right)(\mathbf{x}) := \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^n} \varphi\left(e^{-\mathbf{k}}\mathbf{x}^{\mathbf{w}}\right) w_j \int_{k_j/w_j}^{(k_j+1)/w_j} f\left(e^{k_j'/w_j'}, e^{u}\right) du, \qquad (\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n) \tag{1.16}$$

olarak vereceğiz. Bu yeni operatörler ailesinin noktasal ve düzgün yakınsaklığı, yaklaşım hızı, uygun fonksiyon sınıfları için elde edilmektedir. Ayrıca, noktasal yakınsaklığın hızını belirlemede önemli bir teorem olan Voronovskaya tipli teorem de elde edilmektedir. Yani, tanımlanan operatörler Mellin analizinden oluşan kavramlar yardımıyla oluşturulduğunda, Voronovskaya teoremi için, öncelikle çok değişkenli Mellin Taylor formülü tanıtılmakta ve bu formül yardımıyla Mellin-Voronovskaya teoremi sunulmaktadır. Diğer taraftan, örnekleme değerlerini düzgün sıklık yerine, keyfi sıklıkların alınmasına imkan tanıyan (1.10) tipli Kantorovich operatörleri, çok değişkenli exponansiyel sampling operatörleri için de elde edilmektedir. Bu operatörler, uygun $f:\mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}$, φ fonksiyonları altında $\mathbf{w} > 0, x \in \mathbb{R}_+^n$ için

$$\begin{aligned}\left(E_{\mathbf{w},j}^{\varphi} f\right)(\mathbf{x}) &:= \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^n} \varphi\left(e^{-t_{\mathbf{k}}}\mathbf{x}^{\mathbf{w}}\right)\left[\frac{w_j}{\Delta_{k_j}} \int\limits_{t_{k_j}/w_j}^{(t_{k_j+1})/w_j} f\left(e^{t'_{k_j}/w'_j}, e^u\right) du\right] \qquad (1.17)\\ &= \sum_{(k_1,\ldots,k_n)\in\mathbb{Z}^n} \varphi\left(e^{-k_1}x_1^{w_1}, \ldots, e^{-k_n}x_n^{w_n}\right) w_j \int\limits_{k_j/w_j}^{(k_j+1)/w_j} f\left(e^{\frac{k_1}{w_1}}, \ldots, e^u, \ldots e^{\frac{k_n}{w_n}}\right) du\end{aligned}$$

olarak tanımlanmakta ve bu operatörler için de bir önceki bölümde elde edilen sonuçlar verilmektedir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde tez boyunca kullanılacak temel notasyonlar tanıtılacaktır. Bu bölümde verilen temel tanımlar ve notasyonlar için Maddox (1989); DeVore ve Lorentz (1993); Koçak (2011) kaynaklarından yararlanılmıştır.

Tanım 2.1 (Vektör uzayı) *$V \neq \emptyset$ bir küme ve $\mathbb{F}$ bir cisim olsun.*

$$\begin{array}{rccc} \oplus : & V \times V & \to & V \\ & (u,v) & \to & u \oplus v \end{array}$$

olarak tanımlanan iç işlem,

1. *$\forall u, v, w \in V$ için $(u \oplus v) \oplus w = u \oplus (v \oplus w)$,*
2. *$\forall u \in V$ için $\theta \oplus u = u \oplus \theta = u$ olacak şekilde bir $\theta \in V$ bulunabilir,*
3. *Her bir $u \in V$ için $u \oplus u^{-1} = u^{-1} \oplus u = \theta$ olacak şekilde $u^{-1} \in V$ bulunabilir,*
4. *$\forall u, v \in V$ için $u \oplus v = v \oplus u$*

özelliklerini sağlıyorsa V'ye değişmeli (Abelyen) grup denir. Ayrıca, bir V değişmeli grubu üzerinde tanımlanan dış işlem

$$\begin{array}{rccc} \odot : & \mathbb{F} \times V & \to & V \\ & (\alpha,u) & \to & \alpha \odot u \end{array}$$

5. *$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}$ ve $\forall u \in V$ için $(\alpha \odot \beta) \odot u = \alpha \odot (\beta \odot u)$,*
6. *$\forall \alpha \in \mathbb{F}$ ve $\forall u, v \in V$ için $\alpha \odot (u \oplus v) = (\alpha \odot u) \oplus (\alpha \odot v)$,*
7. *$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}$ ve $\forall u \in V$ için $(\alpha \oplus \beta) \odot u = (\alpha \odot u) \oplus (\beta \oplus u)$,*
8. *$\forall u \in V$ için $1_{\mathbb{F}} \odot u = u$ olacak şekilde $1_{\mathbb{F}} \in \mathbb{F}$ bulunabilir*

özelliklerini sağlıyorsa, V kümesi $\oplus$ ve $\odot$ işlemleri ile bir vektör uzayı oluşturur ve $(V, \oplus, \odot)$ ile gösterilir.

$a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq b$, olmak üzere $[a, b]$ aralığı üzerinde tanımlı sürekli fonksiyonların kümesi $C([a, b])$ ile gösterilir. Yani,

$$C([a,b]) = \{f | f : [a,b] \to \mathbb{R} \text{ sürekli fonksiyon}\}$$

dir. $C\left([a,b]\right)$ kümesi, $\mathbb{R}$ cismi altında

$$\begin{array}{rlll} +: & C\left([a,b]\right)\times C\left([a,b]\right) & \rightarrow & C\left([a,b]\right) \\ & (f(\cdot),g(\cdot)) & \rightarrow & (f+g)(\cdot) \quad = f(\cdot)+g(\cdot) \end{array}$$

ve

$$\begin{array}{rlll} \cdot: & \mathbb{R}\times C\left([a,b]\right) & \rightarrow & C\left([a,b]\right) \\ & (\alpha,f(\cdot)) & \rightarrow & (\alpha\cdot f)(\cdot) \quad = \alpha\cdot f(\cdot) \end{array}$$

işlemleri ile bir vektör uzayı belirtir.

Tanım 2.2 (Alt vektör uzayı) *$(V,\oplus,\odot)$ bir vektör uzayı ve $A\subseteq V$ olsun. A kümesi $\oplus$ ve $\odot$ işlemlerine göre vektör uzayı oluyorsa, A kümesine $(V,\oplus,\odot)$ vektör uzayının alt vektör uzayı denir.*

$a,b\in\mathbb{R}$ olmak üzere $[a,b]$ aralığı üzerinde tanımlı $n.$ dereceden polinomlar kümesi $P\left([a,b]\right)$ ile gösterilir. Yani,

$$P\left([a,b]\right)=\{p\,|\,p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}\cdots+a_1x+a_0, a_n\neq 0, a_n\in\mathbb{R}, x\in[a,b], n\in\mathbb{N}\}$$

dir. $P([a,b])$ kümesi, $\mathbb{R}$ cismi altında

$$\begin{array}{rlll} +: & P\left([a,b]\right)\times P\left([a,b]\right) & \rightarrow & P\left([a,b]\right) \\ & (p,q)(\cdot) & \rightarrow & (p+q)(\cdot) \quad p(\cdot)+q(\cdot) \end{array}$$

ve

$$\begin{array}{rlll} \cdot: & \mathbb{R}\times P\left([a,b]\right) & \rightarrow & P\left([a,b]\right) \\ & (\alpha,p)(\cdot) & \rightarrow & (\alpha p)(\cdot) \quad = \alpha\cdot p(\cdot) \end{array}$$

işlemleri ile bir vektör uzayıdır. $P([a,b])\subseteq C\left([a,b]\right)$ olduğundan $P([a,b])$ kümesi $(C([a,b]),+,\cdot)$ uzayının bir alt vektör uzayıdır.
$\mathbb{R}$'de bulunan tüm Lebesgue ölçülebilir fonksiyonların kümesi de bir vektör uzayı belirtir ve $M(\mathbb{R})$ ile gösterilecektir.

Tanım 2.3 (Destek) *$f:X\rightarrow\mathbb{R}$ fonksiyonunun küme teoritik destek bölgesi X kümesinin f fonksiyonu altındaki değerinin sıfır olmadığı noktaların kümesidir. Yani,*

$$supp(f)=\{x\in X : f(x)\neq 0\}$$

olarak verilir.

Burada destek fonksiyonu her ne kadar kümesel anlamda tanımlanmış olsada X kümesi üzerinde yeterli bilgiye sahip olunmadığından analiz ve topoloji alanlarında genellikle destek tanımı aşağıdaki şekilde güncellenir.

Tanım 2.4 (Kapalı Destek) *X kümesi topolojik bir uzay ve $f : X \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olduğunda kapalı destek karşımıza çıkar. Bu durumda f fonksiyonunun destek fonksiyonu X kümesinin f fonksiyonunu sıfırdan farklı yapan noktalardan oluşan alt kümesinin kapanışı olarak ifade edilir. Yani,*

$$supp(f) = \overline{\{x \in X : f(x) \neq 0\}} = \overline{f^{-1}(0^t)}\text{'dir.}$$

Örneğin, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & |x| < 1 \\ 0, & |x| \geq 1 \end{cases}$$

kuralı ile verilsin. Bu durumda, f kümesi $(-1, 1)$ aralığında sıfırdan farklıdır. O halde bu fonksiyonun destek bölgesi sıfırdan farklı olduğu aralığın kapanışı olan $[-1, 1]$ aralığı olarak yazılır.

Tanım 2.5 (Kompakt destek) *Kapalı destek bölgesi kompakt bir küme belirten fonksiyonların desteğine kompakt destek denir.*

X kümesi $\mathbb{R}$ (veya $\mathbb{R}^n$) olarak alınırsa, f fonksiyonu ancak sınırlı desteğe sahip ise (yani, f fonksiyonunun sıfırdan farklı olduğu tüm noktalar bir reel sayı ise) kompakt desteğe sahip olabilir. Çünkü $\mathbb{R}$ (veya $\mathbb{R}^n$) kümesinin alt kümeleri ancak kapalı ve sınırlı ise kompakttır.
Kompakt destekli olmak sonsuz için sıfırlanmaktan daha kuvvetli bir şarttır. Örneğin,

$$f(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

kuralı ile tanımlanan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu sonsuz için sıfırlanır ($|x| \to \pm\infty$ iken $f(x) \to 0$), fakat destek bölgesi $\mathbb{R}$ olup kompakt değildir. I üzerinde tanımlı kompakt desteğe sahip fonksiyonların kümesi $C_c(I)$ ile gösterilir. Yani,

$$C_c(I) = \{f | f : I \to \mathbb{R} \text{ kompakt desteğe sahip fonksiyon}\}$$

olarak verilir.

Tanım 2.6 (Normlu Uzay) *$\mathbb{F}$ cismi $\mathbb{R}$ (veya $\mathbb{C}$) olmak üzere $(X, +, \cdot)$, $\mathbb{F}$ üzerinde bir vektör uzayı ve*

$$\begin{aligned} ||\cdot|| : \quad X &\to \quad \mathbb{F} \\ x &\to \quad ||x|| \end{aligned}$$

bir fonksiyon olsun.

1. θ_X, X *vektör uzayının etkisiz elemanı olmak üzere,* $\forall x \in X$ *için* $||x|| \geq 0$ *ve* $||x|| = 0 \iff x = \theta_X$,

2. $\forall \alpha \in \mathbb{F}$ *ve* $\forall x \in X$ *için* $||\alpha x|| = |\alpha|||x||$,

3. $\forall x, y \in X$ *için* $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$

özellikleri sağlanıyorsa, $|| \cdot ||$ *fonksiyonuna* X *üzerinde bir norm ve* $(X, || \cdot ||)$ *ikilisine normlu uzay denir.*

$(C([a, b]), +, \cdot)$ vektör uzayı üzerinde

$$\begin{array}{rccl} || \cdot ||_\infty : & C([a, b]) & \to & \mathbb{R} \\ & f & \to & ||f||_\infty = \max\limits_{x \in [a,b]} |f(x)| \end{array}$$

fonksiyonu bir norm belirtir ve bu norma supremum normu denir.
X ölçülebilir bir uzay olmak üzere f fonksiyonu p-integrallenebilir ise, yani

$$\int_X |f|^p d\mu < +\infty$$

özelliğini sağlıyorsa $f \in L^p(X)$ denir. $f \in L^p(X)$ fonksiyonu için

$$||f||_p = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p}$$

kuralı ile verilen $|| \cdot ||_p$ fonksiyonu $L^p(X)$ kümesi üzerinde bir norm belirtir ve p-norm olarak adlandırılır.

Tanım 2.7 (Dizi) *A boştan farklı bir küme olmak üzere*

$$\begin{array}{rccc} s : & \mathbb{N} & \to & A \\ & n & \to & s(n) \end{array}$$

olarak tanımlanan fonksiyonlara dizi denir. Özel olarak $A = \mathbb{R}$ olması durumunda diziye reel terimli dizi ve $A = \mathbb{C}$ olması durumunda diziye kompleks terimli dizi denir. A kümesinin elemanlarının fonksiyonlar olması durumunda (s_n) dizisine fonksiyon dizisi denir.

Tanım 2.8 (Fonksiyon dizilerinin noktasal yakınsaklığı) *$A \subseteq \mathbb{R}$ olmak üzere $f_n : \mathbb{N} \to F(A)$ fonksiyon dizisinin A üzerinde f fonksiyonuna noktasal yakınsak olması için gerek ve yeter şart*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \textit{ve} \ \ \textit{her bir} \ x \in A \ \textit{için} \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \textit{öyleki} \ \forall n \geq n_0 \ \textit{için} \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

olmasıdır.

Tanım 2.9 (Fonksiyon dizilerinin düzgün yakınsaklığı) *$A \subseteq \mathbb{R}$ olmak üzere $f_n : \mathbb{N} \to F(A)$ fonksiyon dizisinin A üzerinde f fonksiyonuna düzgün yakınsak olması için gerek ve yeter şart*

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ için } \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ öyleki } \forall n \geq n_0 \text{ ve } \forall x \in A \text{ için } |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

olmasıdır.

Tanım 2.10 (Seri) *$\mathbb{R}$ içinde herhangi bir (a_n) dizisi verilmiş olsun.*

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \tag{2.1}$$

sembolüne seri adı verilir. Burada a_n, $n = 1, 2, ...$, sayılarına serinin terimleri, a_n sayısına da serinin n. terimi denir.

Tanım 2.11 (Kısmi toplamlar dizisi) *Terimleri $S_1 = a_1, S_2 = a_1 + a_2 = S_1 + a_2, S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = S_2 + a_3, \ldots, S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = S_{n-1} + a_n$ olarak tanımlanan (S_n) dizisine* (2.1) *serisinin kısmi toplamlar dizisi adı verilir.*

Tanım 2.12 (Kalan terim) *k herhangi bir doğal sayı olmak üzere*

$$a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots + a_{k+m} + \ldots = \sum_{n=k+1}^{+\infty} a_n$$

serisine, (2.1) *serisinin k-nıncı kalan terimi adı verilir, $R_k = \sum\limits_{n=k+1}^{+\infty} a_n$ olarak gösterilir.*

Tanım 2.13 (Serinin yakınsaklığı) *$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ içinde $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = S$ limiti varsa* (2.1) *serisinin toplamı S'dir, denir ve*

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

olarak gösterilir. S toplamı sonlu ise (2.1) *serisi yakınsak ve $S = -\infty$ veya $S = +\infty$ ya da $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ limiti yoksa,* (2.1) *serisi ıraksaktır, denir.*

Tanım 2.14 (Seriler için Cauchy yakınsaklık kriteri) (2.1) *serisinin yakınsak olması için gerek ve yeter şart $\varepsilon > 0$ için $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ öyleki $\forall n \geq n_\varepsilon$ ve $\forall p \in \mathbb{N}$ için $\left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} a_n\right| < \varepsilon$ olmasıdır.*

Tanım 2.15 (Mutlak yakınsak, koşullu yakınsak) *$\mathbb{R}$ içinde herhangi bir (a_n) dizisi verilmiş olsun. Terimleri negatif olmayan*

$$|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| + \ldots = \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$$

serisini göz önüne alalım.

1. *Eğer,* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ *serisi yakınsak ise* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *serisi mutlak yakınsaktır denir.*

2. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *serisi yakınsak, fakat* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ *serisi ıraksak ise bu taktirde* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *serisi koşullu yakınsaktır denir.*

Tanım 2.16 (Metrik Uzay) *X boştan farklı bir küme olmak üzere, $d : X \times X \to \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ fonksiyonu her $x, y, z \in X$ için*

i. $d(x,y) = 0 \iff x = y,$

ii. $d(x,y) = d(y,x),$

iii. $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

özelliklerini sağlıyorsa, d fonksiyonuna X kümesi üzerinde bir metrik ve (X,d) ikilisine metrik uzay denir.

Tanım 2.17 (Operatör) *$(X,+,\cdot)$ ve $(Y,\oplus,\odot)$ aynı F cismi üzerinde tanımlı iki vektör uzayı olmak üzere $T : (X,+,\cdot) \to (Y,\oplus,\odot)$ dönüşümüne operatör denir.*

Tanım 2.18 (Lineer operatör) *$(X,+,\cdot)$ ve $(Y,\oplus,\odot)$ aynı F cismi üzerinde tanımlı vektör uzayları ve $T : (X,+,\cdot) \to (Y,\oplus,\odot)$ operatör olmak üzere, $\forall \alpha, \beta \in F$ ve $x, y \in X$ için*

$$T(\alpha \cdot x + \beta \cdot y) = \alpha \odot T(x) \oplus \beta \odot T(y)$$

eşitliği sağlanıyorsa, T operatörüne lineer operatör denir.

Tanım 2.19 (Pozitif operatör) *$(X,+,\cdot)$ ve $(Y,\oplus,\odot)$ reel değerli fonksiyonların vektör uzayı olsun. $L : (X,+,\cdot) \to (Y,\oplus,\odot)$ operatörü için $x \geq 0$ formundaki her $x \in X$ için $L(x) \geq 0$ sağlanıyorsa, L operatörüne pozitif operatör denir.*

Tanım 2.20 (Lineer pozitif operatör) *Hem lineer operatör hem de pozitif operatör özelliklerini birlikte sağlayan operatöre lineer pozitif operatör denir.*

Tanım 2.21 (Sınırlı operatör) *$(X, ||\cdot||_a)$ ve $(Y, ||\cdot||_b)$ iki normlu uzay ve $L : X \to Y$ bir operatör olsun. $\forall x \in X$ için $||Lx||_b \leq M||x||_a$ olacak şekilde bir $M > 0$ bulunabiliyorsa, L operatörüne X'de sınırlı operatör denir.*

$$||L||_{X \to Y} = \inf\{M : ||Lx||_b \leq M||x||_a\}$$

sayısına L operatörünün normu denir.

Tanım 2.22 (Operatörün sürekliliği) *$(X, ||\cdot||_a)$ ve $(Y, ||\cdot||_b)$ iki normlu uzay ve $L : X \to Y$ bir operatör olsun. $x_0 \in X$ olmak üzere*

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ için } \exists \delta = \delta(\varepsilon, x) > 0 \text{ öyleki } ||x - x_0||_a < \delta \Rightarrow ||L(x) - L(x_0)||_b < \varepsilon$$

sağlanırsa L operatörüne $x_0 \in X$ noktasında süreklidir denir.

Tanım 2.23 (Türev operatörü) *$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için*

$$D^m f := \frac{d^m}{dx^m} f, \quad (m \in \mathbb{N})$$

olarak tanımlanan D operatörüne m-ninci mertebeden türev operatörü denir.

Tanım 2.24 (Anti türev operatörü) *$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için*

$$[I_m]\,(f)(x) := \begin{cases} f(x), & m = 0 \\ \int_0^x \frac{(x-u)^{m-1}}{(m-1)!} f(u)du, & m \geq 1 \end{cases}$$

kuralı ile tanımlanan I operatörüne m-ninci mertebeden anti türev operatörü denir.

Tanım 2.25 (Kuvvet kümesi) *X bir küme olmak üzere, X'in tüm alt kümeleriyle (kendisi ve boş küme dahil) oluşturulan kümeye X'in kuvvet kümesi denir ve $\mathcal{P}(X)$ ile gösterilir.*

Tanım 2.26 (Topolojik uzay) *X boş olmayan bir küme ve τ da X'in kuvvet kümesi $\mathcal{P}(X)$'in bir alt koleksiyonu olsun.*

T.1 X ve $\emptyset$ kümeleri τ'ya aittir,

T.2 τ'nun herhangi bir alt koleksiyonuna ait kümelerin birleşimi yine τ'ya aittir,

T.3 τ'ya ait iki kümenin kesişimi yine τ'ya aittir

özellikleri sağlanıyorsa τ'ya X üzerinde bir topoloji denir. τ koleksiyonu X üzerinde bir topoloji ise (X, τ) sıralı ikilisine bir topolojik uzay denir.

Tanım 2.27 (Topolojik uzayda dizilerin yakınsaklığı) *(X, τ) bir topolojik uzay ve X kümesinin elemanlarından oluşan bir dizi (x_n) olsun. $x \in U$ özelliğindeki her U açık kümesi için bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı $n \geq n_0$ özelliğindeki her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \in U$ olacak şekilde varsa (x_n) dizisine $x \in X$ noktasına yakınsıyor denir. Bu durumda x noktasına (x_n) dizisinin limiti denir ve $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$ veya $x_n \to x$ olarak gösterilir.*

Tanım 2.28 (Topolojik uzayda noktasal süreklilik) *(X,τ_1), (Y,τ_2) iki topolojik uzay, $x_0 \in X$ ve $f : X \to Y$ bir fonksiyon olsun. $f(x_0)$ noktasını içeren her bir U açık kümesi için x_0 noktasını içeren bir V açık kümesi $f(V) \subseteq U$ olacak şekilde bulunabiliyorsa f'ye x_0 noktasında süreklidir denir.*

Tanım 2.29 (Topolojik uzayda süreklilik) *(X,τ_1), (Y,τ_2) iki topolojik uzay ve f de X'den Y'ye bir fonksiyon olsun. f fonksiyonu her $x \in X$ noktasında sürekliyse f'ye X üzerinde sürekli fonksiyon denir.*

Tanım 2.30 (Yoğun Küme) *(X,τ) bir topolojik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. $\overline{A} = X$ ise A'ya (X,τ) uzayının yoğun bir alt kümesi denir.*

$\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$'de yoğun bir kümedir. Bu yoğunluktan ortaya çıkan birkaç yorum yapılabilir. Örneğin, her bir reel sayı, rasyonel sayı dizisinin limiti olarak ifade edebilir. Buna en bilinen örnek ise $e_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ olarak hatırlatılabilir.

Tanım 2.31 (Yönlendirilmiş Küme) *Λ bir küme ve $\leq$ de Λ üzerinde bir bağıntı olsun.*

$i)$ Her $p \in \Lambda$ için $p \leq p$'dir,

$ii)$ $p \leq q$ ve $q \leq r$ özelliğindeki her $p,q,r \in \Lambda$ için $p \leq r$'dır,

$iii)$ Her $p,q \in \Lambda$ için $p \leq s$ ve $q \leq s$ olacak şekilde bir $s \in \Lambda$ vardır

şartları sağlanıyorsa, Λ'ya $\leq$ bağıntısına göre yönlendirilmiş küme denir.

Tanım 2.32 (Ağ) *Λ yönlendirilmiş küme ve X herhangi bir küme olsun. Herhangi bir $x : \Lambda \to X$ fonksiyonuna terimleri X'in elemanlarından oluşan bir ağ denir.*

Her dizi bir ağ teşkil eder, fakat tersi doğru değildir. Ağları dizilerden ayıran temel fark, dizilerin tanım kümesi $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi iken ağlarda herhangi bir Λ yönlendirilmiş küme olmasıdır.

Tanım 2.33 (Ağların yakınsaklığı) *(X,τ) bir topolojik uzay ve X'in elemanlarından oluşan bir ağ $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ olsun. $x \in U$ özelliğindeki her $U \in \tau$ için bir $\alpha_0 \in \Lambda$ elemanı her $\alpha \geq \alpha_0$ için $x_\alpha \in U$ olacak şekilde varsa $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ ağına $x \in X$ noktasına yakınsıyor denir. Bu durumda $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ ağına yakınsak, x noktasına $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ ağının limiti denir ve genellikle bu durum $x_\alpha \to x$ veya $\lim\limits_{\alpha\in\Lambda} x_\alpha = x$ olarak gösterilir.*

Tanım 2.34 (Açık örtü) *(X,τ) bir topolojik uzay ve $A \subseteq X$ olsun.*

1. *I bir indis kümesi olmak üzere her $i \in I$ için $U_i \in \tau$ ve $A \subseteq \bigcup\limits_{i \in I} U_i$ ise $\mathcal{U} = \{U_i | i \in I\}$ koleksiyonuna A'nın bir örtüsü denir.*

2. *$\mathcal{U} = \{U_i | i \in I\}$ koleksiyonu A'nın bir açık örtüsü ve $J \subseteq U$ olmak üzere $\mathcal{V} = \{U_i | i \in J\}$ koleksiyonu A'nın bir örtüsü ise $\mathcal{V} = \{U_i | i \in J\}$ örtüsüne $\{U_i | i \in I\}$ örtüsünün bir altörtüsü denir. Bu durumda J sonluysa $\mathcal{V} = \{U_i | i \in J\}$ örtüsüne $\{U_i | i \in I\}$ örtüsünün sonlu altörtüsü denir.*

Tanım 2.35 (Kompakt topolojik uzay) *(X, τ) bir topolojik uzay olsun. X'in her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa (X, τ) uzayına kompakt topolojik uzay denir.*

Tanım 2.36 (Binom teoremi) *n bir doğal sayı ve $x, y \in \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

olmak üzere

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

olarak tanımlanır.

Tanım 2.37 (Çok değişkenli binom açılımı) *$b_1, b_2, ..., b_k$ negatif olmayan tam sayılar olsun. Çok değişkenli binom açılımı $\sum\limits_{i=1}^{k} b_i = n$ olmak üzere*

$$\binom{n}{b_1, b_2, ..., b_k} = \frac{n!}{b_1! b_2! ... b_k!}$$

olarak tanımlanır.

Tanım 2.38 (Çok değişkenli binom teoremi) *k pozitif tam sayı ve n negatif olmayan tam sayı olsun. Bu durumda*

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)^n = \sum_{b_1 + b_2 + \cdots + b_k = n} \binom{n}{b_1, b_2, ..., b_k} \prod_{j=1}^{k} x_j^{b_j}$$

olarak ifade edilebilir.

Tanım 2.39 (Konveks (dışbükey) fonksiyon) *$I \subseteq \mathbb{R}$ aralık ve f, I'da tanımlı bir fonksiyon olsun. f'nin I'da konveks olması için gerek ve yeter şart $\forall t \in [0,1]$ ve $\forall a, b \in I$ için*

$$f((1-t)a + tb) \leq (1-t)f(a) + tf(b)$$

olmasıdır.

Tanım 2.40 (Test fonksiyonları) *$i \in \mathbb{N}$ ve $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere $e_i(x) := (x)^i$ kuralı ile verilen e_i fonksiyonlarına test fonksiyonları denir.*

Tanım 2.41 ((Klasik) Süreklilik modülü) *$f \in C(\mathbb{R})$ olmak üzere (klasik) süreklilik modülü $\delta > 0$ sayıları için*

$$\omega(f, \delta) := \sup\{|f(x) - f(y)| : x, y \in \mathbb{R}, |x - y| \leq \delta\}$$

olarak tanımlanır ve

$i.$ $\delta \to 0$ iken $\omega(f, \delta) \to 0$'dır.

$ii.$ ω, $\mathbb{R}_+$'da azalmayan ve negatif olmayan bir fonksiyondur.

$iii.$ $\omega(f, \delta_1 + \delta_2) \leq \omega(f, \delta_1) + \omega(f, \delta_2)$'dir.

$iv.$ ω, $\mathbb{R}_+$'da süreklidir.

özelliklerini sağlar.

Tanım 2.42 (Sinyal) *Sinyal, en az bir bağımsız değişkenin (zaman veya uzay) fonksiyonu olan, ölçülebilen herhangi bir miktarın bir soyutlaması olarak tanımlanabilir. Bir sinyal, fiziksel bir miktarın veya değişkenin işlevsel temsilidir ve fiziksel miktarın davranışı hakkında bilgi içerir. Matematiksel olarak, bir sinyal t bağımsız değişkeninin fonksiyonu olarak gösterilir.*

Duyduğumuz bir ses, bir kitabın içindeki resim, televizyondaki bir film sinyal örnekleridir.

Tanım 2.43 (Sürekli sinyal) *Sürekli sinyal, zaman veya uzaydaki tüm anlar için bir değere sahiptir.*

Sürekli zaman sinyali için bir pilin voltajı veya bir sarkacın konumu örnek olarak verilebilir.

Tanım 2.44 (Ayrık sinyal) *Ayrık sinyal, zaman içinde yalnızca ayrık anlarda bir değere sahip olan sinyaldir.*

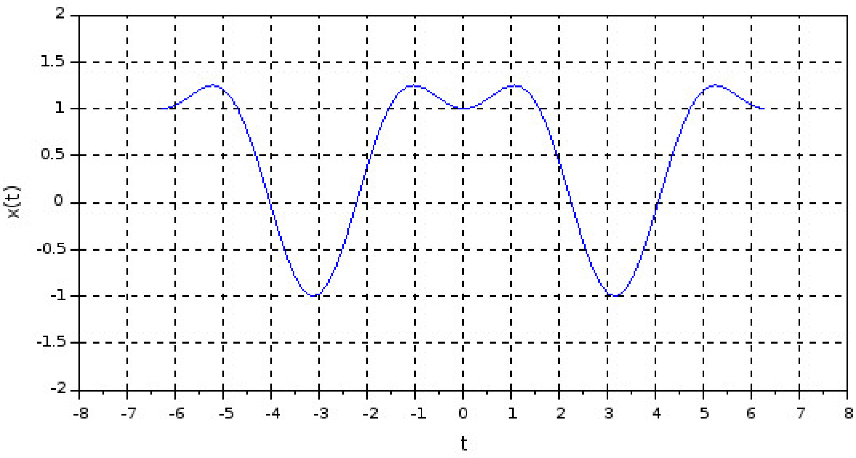
Ayrık sinyal için belirli bir alanda ölçülen günlük ortalama sıcaklık ölçüsü örnek olarak verilebilir. Çoğu zaman, ayrık sinyaller, sürekli sinyallerin örneklenmiş versiyonlarıdır. Örneğin, belirli bir zaman aralığında (örneğin her saniye) bir pilin voltajını ölçersek, sonunda ayrık bir zaman sinyali elde ederiz. $x(t)$ bir zaman sinyali ise ve onu $t_0, t_1, ..., t_n$ anlarında örneklersek, $x(t_0), x(t_1), ..., x(t_n)$ örnek değerlerini elde ederiz.

Tanım 2.45 (Düzgün örnekleme) *İki bitişik örnek arasındaki zaman aralığına örnekleme aralığı denir. Tüm ölçüm için örnekleme aralığı sabit olduğunda, tek tip bir örneklemeye (düzgün örnekleme) sahip oluruz. Yani, T_s örnekleme aralığı olmak üzere*

$$x(t_n) = x(n \cdot T_s)$$

olur.

Sinyaller matematiksel bir fonksiyon yardımı ile gösterilebilir. Örneğin, $t \in [-2\pi, 2\pi]$ için $x(t) = \sin^2 t + \cos^2 t$ sürekli sinyalinin grafiksel gösterimi



Şekil 2.1. $x(t)$ fonksiyonunun grafiksel gösterimi, Anonim (2020)

olarak verebilir. Ayrık sinyaller parçalı fonksiyonlar, tablo yöntemi, dizi, vektör, grafiksel gösterim gibi farklı metodlar ile matematiksel olarak ifade edilebilir.

Tanım 2.46 (Frekans) *Frekans bir olayın birim zaman içinde hangi sıklıkla, yani kaç defa tekrarlandığının ölçümüdür.*

Tanım 2.47 (Bant genişliği) *Bir sinyalin aldığı maksimum frekans değeri ile minumum frekans değerini sınır noktaları kabul eden aralığa sinyalin bant genişliği denir.*

Tanım 2.48 (Bant sınırlı fonksiyon) $F \in L^2(-N, N), N > 0$ *olmak üzere* f *fonksiyonu*

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-N}^{N} F(w) e^{itw} dw$$

olarak ifade edilebiliyorsa f *fonksiyonuna* $[-N, N]$ *aralığında bant sınırlı denir.*

Tanım 2.49 (Fourier dönüşümü, Cömert, 2015) *Bir* f *fonksiyonun Fourier dönüşümü genel olarak* $\hat{f}$ *ile gösterilir.* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *sürekli fonksiyonunun Fourier dönüşümünü tanımlamak için* *birden fazla seçenek vardır. Her $\xi \in \mathbb{R}$ için*

$$\hat{f}(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-2\pi i x\xi}\, dx$$

yaygın olanlardan biridir.

Tanım 2.50 (Ters Fourier dönüşümü) *Uygun koşullar altında f, herhangi $x \in \mathbb{R}$ için*

$$f(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi)\, e^{2\pi i x\xi}\, d\xi$$

ters Fourier dönüşümü ile $\hat{f}$'nin bir gösterimi olarak yazılabilir.

Fourier dönüşümü veya spektral yoğunluğu sınırlı desteğe sahip olan sinyaller bant sınırlıdır.

Teorem 2.1 (Poisson toplam formülü) $g\left(\frac{k}{T}\right)$ *ifadesi $f(t)$'nin Fourier dönüşümü, yani,*

$$g\left(\frac{k}{T}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\, e^{-2\pi i k\tau/T} d\tau$$

olmak üzere Poisson toplam formülü

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(t+nT) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} g\left(\frac{k}{T}\right) e^{2\pi i k t/T}$$

olarak ifade edilir. Özel olarak, $t = 0$ alınırsa

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \hat{f}(m)$$

formunda yazılır.

İspat (Jaramillo, 2019) $F(t) = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} f(t+nT)$ olduğunu varsayalım. $F(t)$, t'nin bir periyodik fonksiyonu olduğundan

$$G(k) = \int_{-T/2}^{T/2} e^{2\pi i k t/T} F(t) dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-T/2}^{T/2} e^{2\pi i k t/T} f(t+nT) dt$$

olmak üzere Fourier serisi,

$$F(t) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} G(k) e^{2\pi i k t/T}$$

olarak yazılabilir. $\tau \to t + nT$ değişken değiştirmesi yapılırsa,

$$\begin{aligned}
G(k) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{\frac{1}{2}(2n-1)T}^{\frac{1}{2}(2n+1)T} d\tau e^{-2\pi i k\tau/T} \underbrace{e^{2\pi i k n}}_{1} f(\tau) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{\frac{1}{2}(2n-1)T}^{\frac{1}{2}(2n+1)T} d\tau e^{-2\pi i k\tau/T} f(\tau) \\
&= \lim_{n\to+\infty} \left\{ \int_{\frac{1}{2}(2n-1)T}^{\frac{1}{2}(2n+1)T} + \int_{\frac{1}{2}(2(n-1)-1)T}^{\frac{1}{2}(2(n-1)+1)T} + \cdots + \int_{\frac{1}{2}(-2(n-1)-1)T}^{\frac{1}{2}(-2(n-1)+1)T} + \int_{\frac{1}{2}(-2n-1)T}^{\frac{1}{2}(-2n+1)T} \right\} \\
&\times d\tau e^{-2\pi i k\tau/T} f(\tau) \\
&= \lim_{n\to+\infty} \left\{ \int_{\frac{1}{2}(2n-1)T}^{\frac{1}{2}(2n+1)T} + \int_{\frac{1}{2}(2n-3)T}^{\frac{1}{2}(2n-1)T} + \cdots + \int_{\frac{1}{2}(-2n+1)T}^{\frac{1}{2}(-2n+3)T} + \int_{\frac{1}{2}(-2n-1)T}^{\frac{1}{2}(-2n+1)T} \right\} \\
&\times d\tau e^{-2\pi i k\tau/T} f(\tau) \\
&= \lim_{n\to+\infty} \int_{-\frac{1}{2}(2n+1)T}^{\frac{1}{2}(2n+1)T} d\tau e^{-2\pi i k\tau/T} f(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau e^{-2\pi i k\tau/T} f(\tau) \\
&= g\left(\frac{k}{T}\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak,

$$F(t) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} G(k) e^{2\pi i k t/T} = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g\left(\frac{k}{T}\right) e^{2\pi i k t/T}$$

ve Poisson toplam formülü

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(t+nT) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g\left(\frac{k}{T}\right) e^{2\pi i k t/T}$$

elde edilir. □

Tanım 2.51 (Büyük-O Notasyonu) *f, g reel değerli fonksiyonlar olmak üzere $x > x_0$ sayıları için*

$$|f(x)| \leq M|g(x)|$$

olacak şekilde x_0 ve M sayıları bulunabiliyorsa

$$x \to +\infty \text{ iken } f(x) = \mathcal{O}(g(x))$$

denir.

Önerme 2.1 (Parseval Özdeşliği) *$f, g \in L^2_{\mathbb{C}}([-T, T])$ ise ve*

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-in2\pi t/T} dt, \qquad d_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(t) e^{-in2\pi t/T} dt$$

olmak üzere

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in2\pi t/T} \;\; \textit{ve} \;\; g(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} d_n e^{in2\pi t/T}$$

kompleks Fourier serilerine (açılımlarına) sahip ise

$$\frac{1}{T}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)}dx = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n\overline{d_n}$$

dir.

İspat

$$f(t)\overline{g(t)} = f(t)\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \overline{d_n}e^{-in2\pi t/T} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \overline{d_n}f(t)e^{-in2\pi t/T}$$

olduğu göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\overline{g(t)}dt &= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \overline{d_n}f(t)e^{-in2\pi t/T}dt \\ &= \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \overline{d_n}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-in2\pi t/T}dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n\overline{d_n} \end{aligned}$$

elde edilir. □

3. WEIERSTRASS YAKLAŞIM TEOREMİ, BERNSTEIN POLİNOMLARI VE FORMLARI

Bir önceki bölümde, bir topolojik uzayın her bir elemanının, uzayın yoğun bir altkümesinin elemanlarından oluşan bir dizinin limiti olarak ifade edilebileceği verilmişti. Ancak bu durumun tersi birinci sayılabilir topolojik uzaylarda geçerlidir.
$C([a,b])$ uzayı ve üzerinde supremum metriği ile elde edilen topolojik uzay göz önüne alındığında, yoğun bir altuzayı olan $P([a,b])$'nin elemanlarından oluşan dizinin limiti olarak ifade edilebilen $f \in C([a,b])$'lerin ifade edilişi ve bu metodların geliştirilmesi, Weierstrass yaklaşım teoremi ve lineer pozitif operatörlerle yaklaşım teori alanlarını oluşturmaktadır. Yine, sürekli fonksiyonlar yerine integrallenebilir fonksiyonlar için de benzer metodlar bu teori içerisinde sunulmuştur. Lineer pozitif operatörler ile yaklaşım teorinin bu manadaki özetini aşağıdaki gibi verebiliriz.

Teorem 3.1 (Weierstrass yaklaşım teoremi, Weierstrass (1885)) *f fonksiyonu $[a,b]$ aralığı üzerinde sürekli fonksiyon ise, her $\varepsilon > 0$ için $|f(x) - p_n(x)| < \varepsilon$ olacak şekilde (p_n) polinomlar dizisi vardır. Başka bir deyişle, $[a,b]$ aralığında sürekli her f fonksiyonuna düzgün olarak yakınsayan bir (p_n) polinomlar dizisi vardır.*

Weierstrass yaklaşım teoremi (WYT), $P([a,b])$,'nin $C([a,b])$'de yoğun olduğunu, yani, (p_n), $P([a,b])$'de $n.$ dereceden bir polinomlar dizisi olmak üzere, $\forall \varepsilon > 0$ ve $\forall f \in C[a,b]$ için

$$|f(x) - p_n(x)| < \varepsilon$$

olduğunu söyler. Bu teorem için farklı matematikçiler tarafından birçok farklı metod ile ispatlar verilmiştir. Verilen ispatlar temelde üç gruba ayrılabilir. İlk grup, Weierstrass (1885); Picard (1891); Fejér (1916, 1930); Landau (1908) ve de la Vallée Poussin (1908)'in kanıtlarını içeren, bir şekilde singüler integrallere dayanan ispatlardan oluşur. İkinci grup, belirli bir fonksiyona yaklaşma fikrine dayanmaktadır. Bu grupta Runge (1885, 1886); Lebesgue (1898); Mittag-Leffler (1900) ve Lerch (1892)'in ispatlarını bulabiliriz. Son olarak, yukarıdaki gruplardan hiçbirine tam olarak ait olmayan ispatları içeren üçüncü grup vardır. Burada Lerch (1903); Volterra (1897) ve Bernstein (1912)'ın verdiği ispatları buluruz ki bu metodlar cebirsel yöntemlere dayanmaktadır.

Bizim dikkate almak istediğimiz ispat, $[0,1]$ aralığında Bernstein polinomlarının kendisini oluşturan f fonksiyonlarına yakınsamasının gösterilmesiyle elde edilen ispattır. Bernstein, WYT'nin aksine, ispatını $[a,b]$ aralığında değil $[0,1]$ aralığında vermiştir. Ancak, herhangi bir $[a,b]$ aralığı $y=(x-a)/(b-a)$ lineer dönüşümü ile $[0,1]$ aralığına dönüştürebileceğinden bu genellikten birşey kaybettirmemiştir.

Tanım 3.1 (Bernstein Polinomları) *f, $[0,1]$ aralığında reel değerli sınırlı bir fonksiyon olsun. $B_n : B([0,1]) \to C([0,1])$ operatörleri*

$$(B_n f)(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right), \qquad (x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}) \tag{3.1}$$

olarak tanımlanır.

Teorem 3.2 (Bernstein Teoremi, Lorentz (1953)) *$(B_n f)$, Bernstein polinomlar dizisi kendisini oluşturan f fonksiyonuna $[0,1]$ aralığında düzgün olarak yakınsar.*

Bernstein operatörler dizisi bilgisayar destekli geometrik dizayn (Winkel, 2001), otomotiv sanayi (de Casteljau, 1993; Bézier, 1966, 1967) gibi farklı alanlarda uygulama bulmuştur. Bernstein operatörlerinin ardından Szász (1950); Meyer–König Zeller (1960); Baskakov (1961); Bleimann-Butzer-Hahn (1980) gibi birçok yeni operatörler dizisi tanımlanarak, kendisini oluşturan fonksiyona yakınsaması test edilmiştir. Bu test operatörler dizisinin tanımına bağlı olarak oldukça güç olabileceğinden tanımlanan operatörler dizisinin yakınsama yapıp yapmayacağını incelemek için genel bir karakterizasyon yöntemine ihtiyaç duyulmuştur. Bu problemi Bohman, $[0,1]$ aralığında lineer pozitif operatörlerin sürekli f fonksiyonuna yakınsamasının incelenmesi olarak ele almıştır.

Bohman (1952), $x \in [0,1]$, $0 \leq \alpha_{k,n} \leq 1$ olduğunda

$$(L_n f)(x) = \sum_{k=0}^{n} f(\alpha_{k,n}) P_{k,n}, \qquad (P_{k,n} \geq 0)$$

pozitif lineer operatörler dizisinin $[0,1]$ aralığında f fonksiyonuna düzgün yakınsak olabilmesi için gerek ve yeter şartların, $(\alpha_n), (\beta_n), (\gamma_n)$ dizileri $[0,1]$ üzerinde düzgün sıfır dizileri olmak üzere,

$$(L_n e_0)(x) \to 1 + \alpha_n(x), \tag{i}$$

$$(L_n e_1)(x) \to x + \beta_n(x), \tag{ii}$$

$$(L_n e_2)(x) \to x^2 + \gamma_n(x) \tag{iii}$$

olduğunu göstermiştir. Bohman'ın teoreminin $[0,1]$ aralığındaki fonksiyonlarla kısıtlı kalmasına rağmen, P. P. Korovkin (1959) bu teoremin $[a,b]$ aralığında verilen genel halini ispatlamıştır ve bugün bu teorem iki matematikçinin ortak anısına Bohman-Korovkin teoremi olarak adlandırılmaktadır.

Teorem 3.3 (Bohman-Korovkin Teoremi, Bohman, 1952; Korovkin, 1959) (L_n) *lineer pozitif operatörler dizisi,* $\forall x \in [a,b]$ *için* (i), (ii), (iii) *şartlarını sağlasın ve* f *tüm reel eksende sınırlı,* $[a,b]$ *aralığında sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda* $(L_n f)$*, kendisini oluşturan* f *fonksiyonuna düzgün olarak yakınsar, yani,*

$$\lim_{n\to+\infty} ||L_n f - f||_\infty = 0$$

dır.

İspat Öncelikle teoremin hipotezini yeniden ifade edelim. (i), (ii) ve (iii) ifadelerini açık halde,

$$\lim_{n\to+\infty} \|L_n e_0 - e_0\|_\infty = 0 = \lim_{n\to+\infty} \|\alpha_n\|_\infty \tag{3.2}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \|L_n e_1 - e_1\|_\infty = 0 = \lim_{n\to+\infty} \|\beta_n\|_\infty \tag{3.3}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \|L_n e_2 - e_2\|_\infty = 0 = \lim_{n\to+\infty} \|\gamma_n\|_\infty \tag{3.4}$$

olarak yazabiliriz. $\forall f \in C([a,b])$ için

$$\lim_{n\to+\infty} \|L_n f - f\|_\infty = 0$$

olduğunu göstermeliyiz.

f fonksiyonu tüm reel eksende sınırlı olduğundan, $\forall x \in [a,b], t \in \mathbb{R}$ için

$$|f(t) - f(x)| < 2M \tag{3.5}$$

olacak şekilde bir $M > 0$ sayısı vardır. $[a,b]$ aralığında süreklilik ve düzgün süreklilik denk olup f fonksiyonu $[a,b]$'de sürekli olduğundan $a \le x \le b$ ve t bu aralığın dışında bir değer olmak üzere $|t - x| < \delta$ olduğunda

$$|f(t) - f(x)| < \varepsilon \tag{3.6}$$

olur. (3.5) ve (3.6)'dan, $x \in [a,b]$ ve $\psi(t) = (t-x)^2$ olmak üzere

$$|f(t) - f(x)| \le \varepsilon + \frac{2M}{\delta^2}\psi(t) \tag{3.7}$$

yazılabilir. Çünkü $|t-x|<\delta$ olduğunda,

$$|f(t)-f(x)| \leq \varepsilon + \frac{2M}{\delta^2}\psi(t) \tag{3.8}$$

olup, $|t-x| \geq \delta$ olduğunda $\frac{(t-x)^2}{\delta^2} \geq 1$ olacağından,

$$\frac{2M}{\delta^2}(t-x)^2 \geq 2M \tag{3.9}$$

sağlanır. Böylece $\forall x \in [a,b]$ ve $\forall t \in \mathbb{R}$ için

$$|f(t)-f(x)| \leq |f(t)| + |f(x)| \leq 2M \leq \varepsilon + \frac{2M}{\delta^2}(t-x)^2 \tag{3.10}$$

gerçeklenir. (L_n) lineer pozitif operatörler dizisi olduğundan monotonluk özelliğinden, $\forall x \in [a,b]$ için

$$|L_n(f;x)| \leq L_n(|f|;x) \tag{3.11}$$

sağlanır (Hacısalihoğlu ve Hacıyev, 1995). Böylece, $\widetilde{\mathbf{1}}(x)=1$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
|L_n(f(t);x)-f(x)| &= |L_n(f(t);x) - L_n(f(x);x) + L_n(f(x);x) - f(x)| \\
&= |L_n(f(t)-f(x);x) + L_n(f(x);x) - f(x)| \\
&\leq |L_n(f(t)-f(x);x)| + |L_n(f(x);x) - f(x)| \\
&\leq L_n(|f(t)-f(x)|;x) + \left| f(x)\left(L_n(\widetilde{\mathbf{1}};x)-1\right)\right| \\
&\leq L_n(|f(t)-f(x)|;x) + \max_{x\in[a,b]}|f(x)| \left|\left(L_n(\widetilde{\mathbf{1}};x)-\widetilde{\mathbf{1}}\right)\right|
\end{aligned}$$

elde edilir. Hipotezden dolayı

$$\lim_{n\to+\infty} \|f\|_\infty \|L_n\widetilde{\mathbf{1}} - \widetilde{\mathbf{1}}\|_\infty = 0, \quad (\forall x \in [a,b], \quad \widetilde{\mathbf{1}}(x) = \widetilde{\mathbf{1}})$$

olur. O halde

$$L_n(|f(t)-f(x)|;x) \rightrightarrows 0$$

olduğunu gösterirsek ispat tamamlanacaktır. (3.10), (3.11) özelliklerinden,

$$\begin{aligned}
|L_n(f(t);x)-f(x)| &\leq L_n(|f(t)-f(x)|;x) \\
&\leq \left| L_n\left(\varepsilon + \frac{2M}{\delta^2}(t-x)^2;x\right)\right| \\
&\leq |L_n(\varepsilon;x)| + \left| L_n\left(\frac{2M}{\delta^2}(t-x)^2;x\right)\right| \\
&= \left|\varepsilon L_n(\widetilde{\mathbf{1}};x)\right| + \left|\frac{2M}{\delta^2}L_n\left((t-x)^2;x\right)\right| = J
\end{aligned} \tag{3.12}$$

bulunur. (3.12) ifadesindeki $(t-x)^2$ terimini açarsak

$$\begin{aligned} J &= \varepsilon \left|L_n(\widetilde{\mathbf{1}};x)\right| + \frac{2M}{\delta^2}\left|L_n\left(t^2;x\right) - 2xL_n(t;x) + x^2 L_n(\widetilde{\mathbf{1}};x)\right| \\ &= \varepsilon \left|L_n(\widetilde{\mathbf{1}};x)\right| + \frac{2M}{\delta^2}\left|L_n\left(t^2;x\right) - x^2 - 2x\left(L_n(t;x) - x\right) + x^2 L_n(\widetilde{\mathbf{1}};x) - x^2\right| \\ &= \varepsilon \left|L_n(\widetilde{\mathbf{1}};x)\right| + \frac{2M}{\delta^2}\left(\left|L_n\left(t^2;x\right) - x^2\right| + |2x|\left|L_n(t;x) - x\right| + \left|x^2\right|\left|L_n(\widetilde{\mathbf{1}};x) - 1\right|\right) \end{aligned}$$

yazılır. $x \in [a,b]$ olduğundan $|x| \leq d$ olacak şekilde bir $d \in \mathbb{R}$ vardır ve $|x^2| \leq d^2$ olacağından

$$\begin{aligned} J &= \varepsilon \left|L_n(\widetilde{\mathbf{1}};x)\right| + \frac{2M}{\delta^2}\left(\left|L_n\left(t^2;x\right) - x^2\right| + |2x|\left|L_n(t;x) - x\right| + \left|x^2\right|\left|L_n(\widetilde{\mathbf{1}};x) - 1\right|\right) \\ &\leq \varepsilon \left|L_n(\widetilde{\mathbf{1}};x)\right| + \frac{2M}{\delta^2}\left(\varepsilon_1 + 2d\varepsilon_2 + d^2\varepsilon_3\right) = \varepsilon^* \end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla

$$|L_n(f(t);x) - f(x)| < \varepsilon^*$$

olup her iki tarafın $x \in [a,b]$ üzerinden maksimumu alınırsa

$$\|L_n f - f\|_\infty < \varepsilon^*$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$L_n f \rightrightarrows f$$

düzgün yakınsaması mevcuttur. □

Şimdi, yukarıda tanıttığımız Bernstein polinomlarının yaklaşım metodu sunduğunu Teorem 3.3'ü kullanarak gösterebiliriz.

İspat (Teorem 3.2'nin İspatı) Bohman-Korovkin teoreminden yararlanarak ispatımızı tamamlayabilmek için test fonksiyonlarının Bernstein polinomları altındaki görüntülerini elde edelim.

(i)

$$(B_n e_0)(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = 1,$$

(ii)

$$\begin{aligned}(B_ne_1)(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n}\binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n}\frac{n!}{k!(n-k)!} x^k(1-x)^{n-k} \\ &= x\sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} x^{k-1}(1-x)^{n-k} \\ &= x\sum_{\ell=0}^{m} \frac{m!}{\ell!(m-\ell)!} x^{\ell}(1-x)^{m-\ell} \\ &= x,\end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned}(B_ne_2)(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{k^2}{n^2}\binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^2}\frac{n!}{k!(n-k)!} x^k(1-x)^{n-k} \\ &= \frac{x}{n}\sum_{k=1}^{n} k\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} x^{k-1}(1-x)^{n-k} \\ &= \frac{x}{n}\sum_{\ell=0}^{m} (\ell+1)\frac{m!}{\ell!(m-\ell)!} x^{\ell}(1-x)^{m-\ell} \\ &= \frac{x}{n}\left(\sum_{\ell=0}^{m} \ell\frac{m!}{\ell!(m-\ell)!} x^{\ell}(1-x)^{m-\ell} + 1\right) \\ &= \frac{x}{n}\left(\sum_{\ell=1}^{m} \ell\frac{m!}{\ell!(m-\ell)!} x^{\ell}(1-x)^{m-\ell} + 1\right) \\ &= \frac{x}{n}\left(\sum_{\ell=1}^{m} \frac{m!}{(\ell-1)!(m-\ell)!} x^{\ell}(1-x)^{m-\ell} + 1\right) \\ &= \frac{x}{n}\left(mx\sum_{\ell=1}^{m} \frac{(m-1)!}{(\ell-1)!(m-\ell)!} x^{\ell-1}(1-x)^{m-\ell} + 1\right) \\ &= \frac{x}{n}\left(mx\sum_{r=0}^{p} \frac{p!}{r!(p-r)!} x^{r}(1-x)^{p-1} + 1\right) \\ &= \frac{x}{n}(mx+1) = \frac{x}{n}((n-1)x+1) = x^2 + \frac{x-x^2}{n}.\end{aligned}$$

Sonuç olarak Teorem 3.3’ün hipotezleri sağlanmış olur. Bu durumda

$$\lim_{n\to+\infty} ||B_nf - f||_\infty = 0$$

olduğu, yani, Bernstein polinomlarının kendisini oluşturan f fonksiyonlarına düzgün yakınsadığı ispatlanmış olur. $\square$

Teorem 3.3'de f fonksiyonun tüm reel eksende sınırlı olma şartını hipotezlerimiz içerisine koymuştuk. Baskakov (1961), f'nin tüm reel eksende sınırlı olması şartı yerine, $1+x^2$ fonksiyonu ile sınırlı olması durumunda da düzgün yakınsamanın mevcut olacağını göstermiştir.

Bernstein operatörleri $C([a,b])$ uzayına ait fonksiyonlar için WYT'nin bir ispatını bize vermektedir. Bernstein operatörlerinin Lebesgue integrallenebilir fonksiyonlara yaklaşmak için uygun olmadığını hatırlatalım (Lorentz, 1953, Bölüm 19). Şimdi, pozitif lineer operatörler ile L_p'deki fonksiyonlara yaklaşım metodu olarak geliştirilen Kantorovich polinomlarını ifade edeceğiz. Fakat buna geçmeden önce bir gerçeği hatırlatalım.

Not 3.1 $C([0,1])$ *uzayı* $L^p([0,1])$ *uzayı içerisinde*

$$||f||_p := \left(\int_0^1 |f(t)|^p dt\right)^{1/p}, \qquad (f \in L_p([0,1]))$$

ve

$$f \in C([0,1]) \textit{ ise } ||f||_p \leq ||f||_\infty$$

normuna göre yoğundur.

L. V. Kantorovich (1930), $L_p((0,1)), 1 \leq p < +\infty$ uzayları için kendi adıyla anılan Kantorovich polinomlarını, $f\left(\frac{k}{n}\right)$ değerlerini fonksiyonun $\left[\frac{k}{n+1}, \frac{k+1}{n+1}\right]$ aralığındaki ortalama değeri ile yer değiştirerek,

$$(K_n f)(x) := \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \left\{ (n+1) \int\limits_{k/(n+1)}^{(k+1)/(n+1)} f(u)du \right\} \tag{3.13}$$

olarak tanımlamıştır. $C([0,1])$ uzayının $L_p([0,1])$ uzayı içerisinde yoğun olduğunu göstermenin en yapıcı ispatlarından biri Kantorovich operatörleri yardımı ile verilmiştir. Bu operatörler dizisinin yaklaşım metodu sunup sunmadığını test etmek için yukarıda ifade edilen Bohman-Korovkin teoremini kullanalım.

Sonuç 3.1 $f \in C([0,1])$ *ise* $[0,1]$ *aralığı üzerinde*

$$\lim_{n\to+\infty} (K_n f)(x) = f(x)$$

yakınsaması düzgündür.

İspat Bohman-Korovkin teoreminin hipotezlerini kontrol etmek için test fonksiyonlarının operatör altındaki görüntülerini hesaplamak gerekmektedir. Direkt hesaplamalar yapılırsa

$$(K_n e_0)(x) = 1, (K_n e_1)(x) = \frac{n}{n+1} e_1 + \frac{1}{2(n+1)}$$

ve

$$(K_n e_2)(x) = \frac{n(n-1)}{(n+1^2)} e_2 + \frac{2n}{(n+1)^2} e_1 + \frac{1}{3(n+1)^2}$$

bulunur. Teorem 3.3'den kanıt tamamlanır. □

Şimdi bu sonucu $L_p([0,1])$ uzayı için verelim.

Teorem 3.4 $1 \leq p < +\infty$ *olmak üzere* $f \in L_p([0,1])$ *ise*

$$\lim_{n \to +\infty} (K_n f)(x) = f(x)$$

sağlanır.

İspat Her $n > 1$ için K_n'yi $L_p([0,1])$'den $L_p([0,1])$'e bir operatör olarak göz önüne alıp $||K_n||_{L_p \to L_p}$ ile bu operatörün normunu gösterelim. Sonucu gösterebilmemiz için, öncelikle her $n \geq 1$ için $||K_n||_{L_p \to L_p} \leq M$ olacak şekilde bir $M > 0$ bulabileceğimizi gösterelim. Buradan sonuca ulaşılabilecektir çünkü verilen her $\varepsilon > 0$ sayısı için bir $g \in C([0,1])$ ve $v \in \mathbb{N}$ vardır öyleki $||f - g||_p < \varepsilon$ ve $n \geq v$ için

$$||K_n g - g||_p \leq \varepsilon$$

sağlanır. Buradan

$$||K_n f - f||_p \leq M||f - g||_p + ||K_n g - g||_p + ||g - f||_p \leq (2 + M)\varepsilon$$

elde edilir. Şimdi, istediğimiz yaklaşımı elde edebilmek için $|t|^p$ fonksiyonunun $\mathbb{R}$ üzerindeki konveksliğinden ve

$$\left| \int f d\mu \right|^p \leq \int |f|^p d\mu$$

eşitsizliğinden yararlanacağız.

Bir $f \in L_p([0,1])$ ve her $n \geq 1$, $0 \leq k \leq n$ için

$$\left((n+1) \int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}} |f(t)| dt \right)^p \leq (n+1) \int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}} |f(t)^p| dt$$

yazabiliriz, buradan her $x \in [0,1]$ için

$$\begin{aligned}|(K_nf)(x)|^p &\le \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\left[(n+1)\int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}}|f(t)|dt\right]^p\\ &\le \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}(n+1)\int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}}|f(t)|^p dt\end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak,

$$\int_0^1 |(K_nf)(x)|^p\,dx \le \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\int_0^1 x^k(1-x)^{n-k}dx\right)\left((n+1)\int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}}|f(t)|^p dt\right)$$

bulunur. Diğer taraftan,

$$B(u,v) := \int_0^1 t^{u-1}(1-t)^{v-1}dt, \quad (u>0, v>0)$$

beta fonksiyonunu ele alarak, $0 \le k \le n$ için

$$\int_0^1 x^k(1-x)^{n-k}dx = B(k+1, n-k+1) = \frac{1}{(n+1)\binom{n}{k}}$$

olduğunu gösterilebilir. Buradan

$$\int_0^1 |(K_nf)(x)|^p\,dx \le \sum_{k=0}^{n}\int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}}|f(t)|^p dt = \int_0^1 |f(t)|^p dt$$

yazabiliriz. Sonuç olarak, her $f \in L^p([0,1])$, için $\|(K_nf)\|_p \le \|f\|_p$'dir, yani, $\|K_n\|_{L_p\to L_p} \le 1$ elde edilir ve ispat tamamlanmış olur. □

Not 3.2

1. $1 \le p < +\infty$ olmak üzere her $f \in L_p([0,1])$ için $[0,1]$ üzerinde hemen hemen her yerde

$$\lim_{n\to+\infty}(K_nf)(x) = f(x)$$

olduğu gösterilebilir (Lorentz, 1953, Teorem 2.2.1).

2. $f \in C([0,1])$, $[0,1]$ üzerinde sürekli türevlenebilir ise $n \ge 1$ ve $x \in [0,1]$ için

$$\begin{aligned}(B'_{n+1}f)(x) &= \sum_{h=0}^{n}(n+1)\left[f\left(\frac{h+1}{n+1}\right) - f\left(\frac{h}{n+1}\right)\right]\binom{n}{h}x^h(1-x)^{n-h}\\ &= (K_nf')(x)\end{aligned}$$

olduğu gösterilebilir. Sonuç 3.1'i kullanarak $[0,1]$ üzerinde

$$\lim_{n\to+\infty}(B'_nf)(x) = f'(x)$$

düzgün olduğunu söyleyebiliriz. Dahası, $f \in C([0,1])$ fonksiyonu $([0,1])$ üzerinde $m \geq 1$'e kadar sürekli türeve sahip ise, her $1 \leq k \leq m$ için

$$\lim_{n \to +\infty} (B_n^{(k)} f)(x) = f^{(k)}(x)$$

düzgündür (Lorentz, 1953, Bölüm 1.8).

4. SAMPLING SERİLERİ VE FORMLARI

Bernstein polinomları kompakt aralıklar üzerinde, sürekli fonksiyonlara bir yaklaşım metodu sunarken, tüm reel eksen üzerinde yaklaşım metodu sunmanın bir yöntemi ise sampling serileridir.

Bu bölümde, ilk olarak sampling serilerinin çıkış noktası olan Whittaker-Kotel'nikov-Shannon teoremi ifade edilecektir. Daha sonra, giriş bölümünde bahsedilen, WKS'nin dezavantajlarından kurtulmak için Butzer ve ark. (1987)'nın tanımladığı genelleştirilmiş sampling serileri ifade edilip bazı formları tanıtılacaktır. Son olarak, exponansiyel sampling serileri ve formları verilecektir. Bu bölümde çalışılan operatörler ailelerinin bir önceki bölümden farklı olarak lineer operatör dizileri yerine lineer operatör ağlarından oluştuğuna dikkat edilmelidir.

Teorem 4.1 (Whittaker-Kotel'nikov-Shannon Teoremi) *f, $[-\sigma,\sigma]$ aralığında bant sınırlı sinyal fonksiyonu ise, yani, $F \in L^2(-\sigma,\sigma)$ için*

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sigma}^{\sigma} F(w) e^{itw} dw \tag{4.1}$$

olarak yazılabiliyorsa, $t_k = k\pi/\sigma, k \in \mathbb{Z}$ örnek değerlerinden oluşturulan

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(t_k) \frac{\sin \sigma(t-t_k)}{\sigma(t-t_k)}, t \in \mathbb{R} \tag{4.2}$$

seri kompakt kümeler üzerinde f fonksiyonuna mutlak ve düzgün olarak yakınsar.

İspat (Zayed, 2018) Kanıtın ana fikri $F(w)$ ve e^{itw}'yi 2σ periyotlu fonksiyonlar olarak tüm reel eksene genişletmek ve Fourier serilerine açmak üzerine kuruludur. Burada notasyon kullanımını arttırmamak adına F ve F'nin periyodik genişlemesi arasında bir gösterim farkı gözetilmeyecektir.

$$\hat{F}(n) = \frac{1}{2\sigma} \int_{-\sigma}^{\sigma} F(w) e^{inw\pi/\sigma} dw$$

olmak üzere

$$F(w) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{F}(n) e^{-in\pi/\sigma}$$

ve

$$e^{itw} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \sigma\,(t-t_n)}{\sigma\,(t-t_n)} e^{inw\pi/\sigma}$$

yazabiliriz. (4.1)'de sağ tarafa Parseval özdeşliği uygulanırsa

$$f(t) = \frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{F}(n) \frac{\sin \sigma (t - t_n)}{\sigma (t - t_n)}$$

elde edilir ki

$$f(t_n) = \frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}} \hat{F}(n)$$

gerçeği göz önüne alındığında (4.2) bulunmuş olur. □

4.1. Genelleştirilmiş Sampling Serileri ve Formları

Butzer ve Stens (1993) tarafından tanımlanan geçmişteki örnek değerlerden yararlanarak fonksiyonların konvolüsyon serileri ile yeniden inşa edilmesini amaçlayan genelleştirilmiş sampling serileri (GSS)'nin tanımı verilecektir.

Tanım 4.1 (GSS, Butzer ve Stens, 1993) *φ fonksiyonu sürekli ve $0 < T_0 < T_1$'ler için $[T_0, T_1]$ aralığında kompakt desteğe sahip olsun. Bu durumda f fonksiyonu*

$$(S_w^{\varphi} f)(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{k}{w}\right) \varphi(wt - k), \qquad (t \in \mathbb{R}, w > 0) \tag{4.3}$$

konvolüsyon serisi olarak yeniden inşa edilebilir.

Şimdi, GSS ile ilgili elde edilmiş bazı sonuçlar verilecektir.

Teorem 4.2 (Butzer ve Stens, 1993) *$\varphi \in C_c(\mathbb{R})$ olsun öyleki*

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \varphi(u - k) = 1, \qquad (u \in \mathbb{R})$$

sağlansın. Bu durumda, $t \in \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonun süreklilik noktası olmak üzere

$$\lim_{w \to +\infty} (S_w^{\varphi} f)(t) = f(t)$$

yakınsaması mevcuttur. Dahası, $f \in C(\mathbb{R})$ ise bu yakınsama düzgündür, yani,

$$\lim_{w \to +\infty} ||S_w^{\varphi} f - f||_\infty = 0$$

dir.

Teorem 4.3 (Butzer ve Stens, 1993) *$\varphi \in C_c(\mathbb{R})$ olsun. $r \in \mathbb{N}$ olmak üzere her $u \in \mathbb{R}$ için*

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} (u-k)^j \varphi(u-k) = \begin{cases} 1, & j=0 \\ 0, & j=1,2,...,r-1 \end{cases} \tag{4.4}$$

sağlanıyorsa, her $f \in C^{(r)}(\mathbb{R})$ ve $w > 0$ için

$$||S_w^{\varphi} f - f||_\infty \leq \frac{m_r(\varphi)}{r!} ||f^{(r)}||_\infty w^{-r}$$

eşitsizliği mevcuttur.

Sonuç 4.1 (Butzer ve Stens, 1993) *$\varphi \in C_c(\mathbb{R})$ çekirdek fonksiyonu, $r \in \mathbb{N}$ için* (4.4) *şartını sağlıyorsa, her $(r-1)$-inci dereceden p_{r-1} cebirsel polinomu için*

$$(S_w^{\varphi} p_{r-1})(t) = p_{r-1}(t), \qquad (t \in \mathbb{R})$$

eşitliği mevcuttur.

$\mathbb{R}$'de sürekli olmayan fakat integrallenebilen fonksiyonlar için (4.3) serileri kullanılamaz. $f(\frac{k}{n})$ örnek noktaları yerine f fonksiyonunun $\left[\frac{k}{n+1}, \frac{k+1}{n+1}\right]$ aralığındaki ortalama değerini kullanarak bu sorun aşılabilir. (4.3) serilerinin Kantorovich versiyonlarının tanımlandığı Bardaro ve ark. (2007) makalesindeki operatörler ailesinin tanımını vermek için öncelikle bazı kısıtlar ile oluşturulan çekirdek fonksiyonunu tanıtalım.

Tanım 4.2 *$\chi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu, $L^1(\mathbb{R})$ uzayına ait, orjinin komşuluğunda sınırlı ve*

$(\chi.1_{1'})$ *Her $u \in \mathbb{R}$ için*

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \chi(u-k) = 1,$$

$(\chi.1_{2'})$ *Bir $\beta > 0$ için*

$$m_{\beta,\Pi}(\chi) := \sup_{u \in \mathbb{R}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\chi(u-k)||u-k|^{\beta} < +\infty$$

şartlarını sağlıyorsa χ fonksiyonuna çekirdek fonksiyonu denir.

Yukarıdaki paragrafta söz edilen soruna çözüm olan operatörler ailesi

$$(S_w f)(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \chi(wx-k) \left[w \int_{k/w}^{(k+1)/w} f(u) du \right], \quad (x \in \mathbb{R})$$

olarak Bardaro ve ark. (2007) tarafından tanımlanmıştır. Fakat burada verildiği gibi örnek değerleri k/w eş aralıklı almak pratikte her zaman mümkün değildir. Bu dezavantajdan kurtulmak ve elde edilen sonuçları en genel halde vermek için tanıtılan operatörler ailesi olan genelleştirilmiş sampling Kantorovich serileri (GSKS)'ni vermeden önce notasyonları bu doğrultuda güncelleyelim.

$\Pi = \{t_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ reel sayı dizisi olsun öyle ki her $k \in \mathbb{Z}$ için $-\infty < t_{k+1} < t_k < +\infty$, $\lim_{k\to\pm\infty} t_k = \pm\infty$ ve $\delta < t_{k+1} - t_k < \Delta$ olacak şekilde Δ, δ sabitleri olsun. Ayrıca, her $k \in \mathbb{Z}$ için $\Delta_k := t_{k+1} - t_k$ alalım.

Tanım 4.3 $\chi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *fonksiyonu,* $L^1(\mathbb{R})$ *uzayına ait, orjinin komşuluğunda sınırlı ve*

$(\chi.1_1)$ *Her* $u \in \mathbb{R}$ *için*

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \chi(u - t_k) = 1, \tag{4.5}$$

$(\chi.1_2)$ *Bir* $\beta > 0$ *için*

$$m_{\beta,\Pi}(\chi) := \sup_{u\in\mathbb{R}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\chi(u - t_k)|\,|u - t_k|^\beta < +\infty \tag{4.6}$$

şartlarını sağlıyorsa χ *fonksiyonuna çekirdek fonksiyonu denir.*

Tanım 4.4 (GSKS, Bardaro ve ark., 2007) χ *çekirdek fonksiyonu için* $(S_w)_{w>0}$ *operatörler ailesi,* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *(veya* $\mathbb{C}$*), her* $x \in \mathbb{R}$ *için seriyi yakınsak yapan lokal integrallenebilir fonksiyon olmak üzere*

$$(S_w f)(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \chi(wx - t_k) \left[\frac{w}{\Delta_k} \int_{t_k/w}^{t_{k+1}/w} f(u)du \right], \quad (x \in \mathbb{R}) \tag{4.7}$$

olarak tanımlanır.

Şimdi, bu operatörler ailesi ile ilgili yakınsaklık sonucu ifade edilecektir.

Teorem 4.4 (Bardaro ve ark., 2007) $f \in M(\mathbb{R})$ *sınırlı bir fonksiyon olsun. Bu durumda,* $x \in \mathbb{R}$*, f'nin süreklilik noktası olmak üzere*

$$\lim_{w\to+\infty} (S_w f)(x) = f(x)$$

yakınsaması mevcuttur. Dahası, $f \in C(\mathbb{R})$ *ise bu yakınsama düzgündür. Yani,*

$$\lim_{w\to+\infty} ||S_w f - f||_\infty = 0$$

dır.

(4.3) serilerinin uygulama alanlarını genişletebilmek için (Costarelli ve Vinti, 2013; Costarelli ve ark., 2014; Asdrubali ve ark., 2018) çok değişkenli fonksiyonlar uzayına genelleştirilmesi gerekir. Bu genelleme, çok değişkenli genelleştirilmiş sampling serileri (ÇDGSS), Butzer ve ark. (1990a) tarafından verilmiştir. ÇDGSS ifade edilmeden önce çekirdek fonksiyonunun tanımı çok değişkenli fonksiyonlar uzayına taşınacaktır.

Tanım 4.5 $\chi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ *fonksiyonu* $L^1(\mathbb{R}^n)$ *uzayına ait, orjinin komşuluğunda sınırlı ve*

$(\chi.2_1)$ *Her* $\mathbf{u}\in\mathbb{R}^n$ *için*

$$\sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^n}\chi(\mathbf{u}-t_{\mathbf{k}})=1, \tag{4.8}$$

$(\chi.2_2)$ *Bir* $\beta>0$ *için*

$$m_{\beta,\Pi^n}(\chi):=\sup_{\mathbf{u}\in\mathbb{R}^n}\sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^n}|\chi(\mathbf{u}-t_{\mathbf{k}})|\,|\mathbf{u}-t_{\mathbf{k}}|^{\beta}<+\infty \tag{4.9}$$

şartlarını sağlıyorsa, χ *fonksiyonuna çekirdek fonksiyonu denir.*

Tanım 4.6 (ÇDGSS, Butzer ve ark., 1990a) $\varphi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{C}$ *sürekli ve sınırlı çekirdek fonksiyonu,* f *sürekli bir fonksiyon olmak üzere, çok değişkenli genelleştirilmiş sampling serileri*

$$\left(S_{\mathbf{w}}^{\varphi}f\right)(\mathbf{t}):=\frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^n}\sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^n}f\left(\frac{\mathbf{k}}{\mathbf{w}}\right)\varphi\left(\mathbf{wt}-\mathbf{k}\right),\qquad\left(\mathbf{t}\in\mathbb{R}^n,\quad\mathbf{w}\in\mathbb{R}_+^n\right)$$

olarak tanımlanır.

ÇDGSS ile ilgili elde edilen noktasal yakınsaklık, yakınsaklık hızı gibi sonuçlar Butzer ve ark. (1990b) makalesinde bulunabilir.

(4.7) serilerinin çok değişkenli fonksiyonlar uzayındaki karşılığı Costarelli ve Vinti (2011) tarafından ifade edilmiştir. Çok değişkenli genelleştirilmiş sampling Kantorovich serileri (ÇDGSKS)'ni ifade edebilmek için iki yeni notasyon eklenmelidir.

$$R_{\mathbf{k}}^{w}:=\left[\frac{t_{k_1}}{w},\frac{t_{k_1+1}}{w}\right]\times\left[\frac{t_{k_2}}{w},\frac{t_{k_2+1}}{w}\right]\times\ldots\times\left[\frac{t_{k_n}}{w},\frac{t_{k_n+1}}{w}\right],\qquad(w>0)$$

ve

$$A_{\mathbf{k}}:=\Delta_{k_1}\cdot\Delta_{k_2}\cdot\ldots\cdot\Delta_{k_n}$$

dır.

Tanım 4.7 (ÇDGSKS, Costarelli ve Vinti, 2011) *χ çekirdek fonksiyonu olsun. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonu, seriyi her* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ *için yakınsak yapan reel integrallenebilir fonksiyon olmak üzere,*

$$\left(S_w^{\chi} f\right)(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^n} \chi\left(w\mathbf{x} - t_{\mathbf{k}}\right) \left[\frac{w^n}{A_{\mathbf{k}}} \int_{R_{\mathbf{k}}^w} f(\mathbf{u})d\mathbf{u}\right], \quad (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, w > 0) \tag{4.10}$$

serilerine çok değişkenli genelleştirilmiş sampling Kantorovich serileri denir.

Şimdi, ÇDGSKS için yakınsaklık teoremini ifade edelim.

Teorem 4.5 (Costarelli ve Vinti, 2011) $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$*, f'nin süreklilik noktası olmak üzere,*

$$\lim_{w\to+\infty} (S_w^{\chi} f)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$$

yakınsaması mevcuttur. Dahası, $f \in C(\mathbb{R})$ ise bu yakınsama düzgündür. Yani,

$$\lim_{w\to+\infty} ||S_w^{\chi} f - f||_{\infty} = 0$$

dır.

4.2. Exponansiyel Sampling Serileri ve Formları

Mellin bant sınırlı fonksiyonların, örneklerin exponansiyel aralıklarla yerleştirildiği bir gösterimi olan exponansiyel sampling teoremi (EST), ışık saçılması, Fraunhofer yönü, radyo astronomisi gibi optik fizik fenomenlerinde temel uygulamaları olan belirli ters problemlerin çözümlerini bulmada güçlü bir araçtır (Casasent, 1978; Bertero ve Pike, 1991; Gori, 1993; Ostrowsky ve ark., 1994). İlk olarak EST'nin tanımı verilecektir. Ardından, EST'de teorinin çalışılmasını zorlaştıran "lin_c" fonksiyonu kullanılmadan tanımlanan exponansiyel sampling serileri tanıtılacaktır. $c \in \mathbb{R}$ için

$$||f||_{X_c} = ||f(\cdot)(\cdot)^{c-1}||_1 = \int_0^{+\infty} |f(u)|u^{c-1}du$$

normu ile verilen

$$X_c = \{f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C} : f(\cdot)(\cdot)^{c-1} \in L^1(\mathbb{R}_+)\}$$

uzayını tanımlayalım. $T \in \mathbb{R}_+, c \in \mathbb{R}$ olmak üzere $B_{c,T}^1$ ile $[-T, T]$ aralığında Mellin bant sınırlı $f \in X_c$ fonksiyonlarını gösterelim.

Teorem 4.6 (EST, Butzer ve Jansche, 1998a) *$w > 0$ ve $c \in \mathbb{R}$ için $f \in B^1_{c,\pi w}$ ve $w > 0$ ise*

$$x^c \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f\left(e^{k/w}\right) \mathrm{lin}_{c/w}\left(e^{-k}x^w\right) \tag{4.11}$$

serisi $\mathbb{R}_+$'da düzgün yakınsaktır ve

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f\left(e^{k/w}\right) \mathrm{lin}_{c/w}\left(e^{-k}x^w\right), \quad (x \in \mathbb{R}_+) \tag{4.12}$$

gösterimi mevcuttur. Burada $c \in \mathbb{R}$ için $\mathrm{lin}_c : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $x \in \mathbb{R}_+ \backslash \{1\}$ için $\mathrm{sinc}(u) := \dfrac{\sin(\pi u)}{\pi u}, u \neq 0, \mathrm{sinc}(0) = 1$ olmak üzere $\mathrm{lin}_c(1) := 1$ sürekli genişlemesi ile

$$\mathrm{lin}_c(x) = \frac{x^{-c}}{2\pi \mathrm{i}} \frac{x^{\pi \mathrm{i}} - x^{-\pi \mathrm{i}}}{\log(x)} = x^{-c}\,\mathrm{sinc}(\log(x)) = \frac{x^{-c}}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^{-\mathrm{i}t} dt$$

dir.

Exponansiyel sampling serileri (ESS)'nin ifadesine geçmeden önce ihtiyaç duyulacak bazı notasyonları tanımlayalım. $c \in \mathbb{R}$ olmak üzere, noktasal Mellin diferansiyel operatörü Θ_c, veya $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ fonksiyonunun noktasal Mellin türevi $\Theta_c f$, $\mathbb{R}_+$'da f''in hemen hemen her yerde varlığı koşuluyla

$$\Theta_c f(x) := x f'(x) + c f(x), \quad (x \in \mathbb{R}_+)$$

olarak tanımlanır (Butzer ve Jansche, 1997). $r \in \mathbb{N}$ olmak üzere r-ninci mertebeden Mellin türev operatörü yinelemeli olarak

$$\Theta_c^1 := \Theta_c, \quad \Theta_c^r := \Theta_c\left(\Theta_c^{r-1}\right)$$

olarak verilir. Kolay gösterim açısından $c = 0$ için $\Theta^r := \Theta_0^r$ ve $\Theta_c^0 := I$ alınacaktır. Burada I birim operatörü göstermektedir. Örneğin, klasik manada üçüncü mertebeden türevlenebilir bir fonksiyonun ilk üç Mellin türevi şöyledir:

$$\begin{aligned}
&\Theta_c f(x) = x f'(x) + c f(x) \\
&\Theta_c^2 f(x) = x^2 f''(x) + (2c+1) x f'(x) + c^2 f(x) \\
&\Theta_c^3 f(x) = x^3 f'''(x) + (3c+3) x^2 f''(x) + \left(3c^2 + 3c + 1\right) x f'(x) + c^3 f(x).
\end{aligned}$$

Ayrıca, $c = 0$ durumunda, aşağıdaki Mellin türevli Taylor formülü mevcuttur (Mamedov, 1991; Bardaro ve Mantellini, 2011).

Teorem 4.7 (Mellin Taylor Formülü, Bardaro ve Mantellini, 2011) *$v \in \mathbb{R}_+$ noktasında yerel olarak $C^{(n)}$ sınıfına ait $f \in C(\mathbb{R}_+)$ fonksiyonu için, $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ sınırlı fonksiyon öyle ki $t \to 1$ için $h(t) \to 0$ olmak üzere*

$$f(tv) = f(v) + (\Theta f)(v)\log(t) + \frac{(\Theta^2 f)(v)}{2!}\log^2(t) + \cdots + \frac{(\Theta^n f)(v)}{n!}\log^n(t) + h(t)\log^n(t)$$

yazılabilir.

Son olarak, çekirdek fonksiyonunun şartlarının exponansiyel bir operatörün ihtiyaçlarını karşılayacak olan modifikasyonlarını ifade edelim. $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olmak üzere

$(\varphi.3_1)$ her $u \in \mathbb{R}_+$ için

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \varphi(e^{-k}u) = 1 \tag{4.13}$$

ve

$$M_0(\varphi) := \sup_{u \in \mathbb{R}_+} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\varphi(e^{-k}u)| < +\infty,$$

$(\varphi.3_2)$ $u \in \mathbb{R}_+$'ya göre

$$\lim_{r \to +\infty} \sum_{|k-\log(u)|>r} \varphi(e^{-k}u) = 0$$

düzgündür,

şartlarını sağlayan φ fonksiyonlarının sınıfı Φ ile gösterilecektir.

$n \in \mathbb{N}$ için $\varphi \in \Phi$ fonksiyonunun cebirsel momenti

$$m_j(\varphi, x) := \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \varphi\left(e^{-k}x\right)\log^j\left(e^k x^{-1}\right) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \varphi\left(e^{-k}x\right)(k - \log(x))^j$$

olarak ve herhangi $\alpha > 0$ için α-nıncı dereceden mutlak momenti serinin yakınsak olduğu yerlerde

$$M_\alpha(\varphi, x) := \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left|\varphi\left(e^{-k}x\right)\right| |k - \log(x)|^\alpha$$

olarak tanımlanmaktadır. Son olarak

$$M_\alpha(\varphi) := \sup_{x \in \mathbb{R}_+} M_\alpha(\varphi, x)$$

alınacaktır.

Tanım 4.8 (ESS, Bardaro ve ark., 2017) *$\varphi \in \Phi$ olsun. $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her $w > 0$ için seriyi reel pozitif yarı eksende mutlak yakınsak yapan bir fonksiyon olmak üzere*

$$(S_w^\varphi f)(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(e^{k/w})\varphi(e^{-k}x^w), \quad (x \in \mathbb{R}_+, w > 0) \tag{4.14}$$

olarak tanımlanır.

Şimdi, exponansiyel sampling serileri için verilmiş bazı sonuçları ispatları ile birlikte ifade edelim.

Teorem 4.8 (Bardaro ve ark., 2017) *$\varphi \in \Phi$ ve f sınırlı olsun. Bu durumda $x \in \mathbb{R}_+$, f'nin süreklilik noktası ise*

$$\lim_{w\to+\infty}(S_w^{\varphi}f)(x) = f(x)$$

yakınsaması mevcuttur.

İspat $x \in \mathbb{R}_+$ noktası f'nin süreklilik noktası olsun. Sabit bir $\varepsilon > 0$ için $\delta > 0$ sayısı seçelim öyle ki

$$\left|\log\left(e^{k/w}x^{-1}\right)\right| = \left|\frac{k}{w} - \log(x)\right| \leq \delta,$$

yani, $|k - w\log(x)| \leq \delta w$ olduğunda $\left|f(x) - f\left(e^{k/w}\right)\right| < \varepsilon$ olsun. $(\varphi.3_1)$ şartından,

$$\begin{aligned}
\left|\left(S_w^{\varphi}f\right)(x) - f(x)\right| &= \left|\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\varphi\left(e^{-k}x^w\right)\left[f\left(e^{k/w}\right) - f(x)\right]\right| \\
&\leq \left(\sum_{|k-w\log(x)|\leq\delta w} + \sum_{|k-w\log(x)|>\delta w}\right)\left|\varphi\left(e^{-k}x^w\right)\right|\left|f\left(e^{k/w}\right) - f(x)\right| \\
&\leq M_0(\varphi)\varepsilon + 2\|f\|_\infty \sum_{|k-w\log(x)|>\delta w}\left|\varphi\left(e^{-k}x^w\right)\right|
\end{aligned}$$

yazılabilir. $w \to +\infty$ için limit alınırsa, $(\varphi.3_2)$ şartından ispat tamamlanır. □

Sıradaki sonuç düzgün yakınsaklık ile ilgilidir. Burada exponansiyel manada geçerli yeni bir düzgün süreklilik tanımı verilecektir.

Tanım 4.9 (log-düzgün süreklilik) *$f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ bir fonksiyon olsun. $\forall\varepsilon > 0$ için $\exists\delta > 0$ öyleki $x, y \in \mathbb{R}$ için $|\log(x) - \log(y)| \leq \delta$ olduğunda $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ oluyorsa, f fonksiyonuna $\mathbb{R}$'de log-düzgün sürekli denir. J kümesi üzerinde tüm log-düzgün sürekli fonksiyonların kümesi $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ ile gösterilecektir.*

Teorem 4.9 (Bardaro ve ark., 2017) *$\varphi \in \Phi$ ve $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+)$ olsun. Bu durumda,*

$$\lim_{w\to+\infty}||S_w^{\varphi}f - f||_\infty = 0$$

dır.

İspat İspat, noktasal yakınsaklık teoreminin ispatındaki yöntem dikkate alınarak ve f fonksiyonunun log-düzgün sürekliliğinden yararlanarak elde edilir. □

$f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+)$ fonksiyonları için nicel yaklaşım sonucunun sunulmasından önce yaklaşımın hızını bulmakta kullandığımız süreklilik modülü tanımı exponansiyel manada ifade edilecektir.

Tanım 4.10 (Logaritmik süreklilik modülü, Bardaro ve Mantellini, 2014) *f fonksiyonu* $\mathbb{R}_+$ *üzerinde sınırlı bir fonksiyon olmak üzere,* $\delta > 0$ *için logaritmik süreklilik modülü*

$$\omega(f,\delta) := \sup\{|f(x) - f(y)| : |\log(x) - \log(y)| < \delta\} \tag{4.15}$$

olarak tanımlanır.

Logaritmik süreklilik modülü, klasik süreklilik modülünün tüm özelliklerine sahiptir (Bardaro ve ark., 2017). Sıradaki teoremlere geçmeden önce bu özelliklerin birkaçını hatırlatıp ispatlarına göz atalım.

Lemma 4.1 (Logaritmik Süreklilik Modülü Özellikleri) $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ *fonksiyonları için logaritmik süreklilik modülü aşağıdaki özellikleri sağlar:*

$i.$ $\delta_1 \leq \delta_2$ *ise* $\omega(f,\delta_1) \leq \omega(f,\delta_2)$*'dir,*

$ii.$ $m \in \mathbb{N}$ *için* $\omega(f, m\delta) \leq m\omega(f,\delta)$*,*

$iii.$ *Herhangi bir* $\lambda > 0$ *sayısı için* $\omega(f,\lambda\delta) \leq (1+\lambda)\,\omega(f,\delta)$ *yazılabilir,*

$iv.$ $\lim\limits_{\delta \to 0} \omega(f,\delta) = 0.$

İspat

$i)$ $0 < \delta_1 < \delta_2$ için

$$A := \{t, x \in \mathbb{R} : |\log(t) - \log(x)| \leq \delta_2\} \text{ ve } B := \{t, x \in \mathbb{R} : |\log(t) - \log(x)| \leq \delta_1\}$$

olarak alınırsa, $A \subseteq B$ olduğu görülmektedir. Supremum tanımından yararlanılırsa istenilen sonuç elde edilir.

$ii)$

$$\omega(f, m\delta) = \sup_{\substack{t,x \in \mathbb{R} \\ |t-x| < m\delta}} |f(t) - f(x)|$$

formülünde $t = x + mh$ alınırsa

$$\begin{aligned}
\omega(f, m\delta) &= \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x+mh) - f(x)| \\
&= \sup_{|h| < m\delta} \left| \sum_{k=0}^{m-1} [f(x+(k+1)h) - f(x+kh)] \right|
\end{aligned}$$

yazılır ve

$$\omega(f,m\delta) \leq \sum_{k=0}^{m-1} \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}\\ |h|<m\delta}} |f(x+(k+1)h)-f(x+kh)|$$

dir. (4.15) tanımı dikkate alınırsa toplama bağlı ifadenin $\omega(f,\delta)$ olduğu görülür ve toplananların sayısı m tane olduğundan

$$\omega(f,m\delta) \leq m\omega(f,\delta)$$

eşitsizliği elde edilir.

$iii)$ λ sayısının tam kısmını m alalım, yani $\lfloor\lambda\rfloor = m$ olsun. O halde, $m \leq \lambda < m+1$ olup $m+1 \leq \lambda+1 < m+2$ yazılabilir. Buradan,

$$\begin{aligned}\omega(f,\lambda\delta) &< \omega(f,(m+1)\delta)\\ &\leq (m+1)\omega(f,\delta)\\ &\leq (\lambda+1)\omega(f,\delta)\end{aligned}$$

bulunur.

$iv)$ f fonksiyonu $\mathbb{R}$'de log-düzgün sürekli bir fonksiyon olduğundan her $\varepsilon > 0$ için bir $\eta > 0$ vardır öyle ki $|\log(t)-\log(x)| < \eta$ olduğunda $|f(t)-f(x)| < \varepsilon$ olur. Bu durumda, (4.15) tanımından görüleceği gibi $\delta < \eta$ olduğunda

$$\omega(f,\delta) < \varepsilon$$

olur. Yani her $\varepsilon > 0$ verildiğinde $\eta > 0$ bulunur öyle ki $\delta < \eta$ olduğunda

$$\omega(f,\delta) < \varepsilon$$

olur. Bu ise

$$\lim_{\delta\to 0}\omega(f,\delta) = 0$$

demektir.

$\square$

Teorem 4.10 (Bardaro ve ark., 2017) *$M_1(\varphi) < +\infty$ olacak şekilde $\varphi \in \Phi$ seçilsin ve $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+)$ olsun. Bu durumda her $\delta > 0$ için*

$$|(S_w^\varphi f)(x) - f(x)| \leq M_0(\varphi)\omega(f,\delta) + \frac{\omega(f,\delta)}{w\delta}M_1(\varphi), \quad (x\in\mathbb{R}_+)$$

eşitsizliği mevcuttur.

İspat Operatörün tanımı uygulanırsa,

$$|(S_w^{\varphi} f)(x) - f(x)| \leq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left|\varphi\left(e^{-k}x^w\right)\right| \omega\left(f, \left|\frac{k}{w} - \log(x)\right|\right)$$

yazabiliriz, ve herhangi $\delta > 0$ için logaritmik süreklilik modülünün (iii) özelliği ve $M_0(\varphi)$, $M_1(\varphi)$ tanımları kullanılırsa

$$\begin{aligned}
|(S_w^{\varphi} f)(x) - f(x)| &\leq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left|\varphi\left(e^{-k}x^w\right)\right| \left(1 + \frac{|(k/w) - \log(x)|}{\delta}\right) \omega(f,\delta) \\
&= \omega(f,\delta) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left|\varphi\left(e^{-k}x^w\right)\right| + \omega(f,\delta) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left|\varphi\left(e^{-k}x^w\right)\right| \left|\frac{k - \log(x^w)}{w\delta}\right| \\
&\leq M_0(\varphi)\omega(f,\delta) + \frac{\omega(f,\delta)}{w\delta} M_1(\varphi)
\end{aligned}$$

bulunur. □

Not 4.1 *Herhangi bir $w > 0$ için $\delta = 1/w$ seçilirse ve $C = M_0(\varphi) + M_1(\varphi)$ alınırsa Teorem 4.10 kabülleri altında,*

$$|(S_w^{\varphi} f)(x) - f(x)| \leq C\omega\left(f, \frac{1}{w}\right)$$

elde edilir.

Not 4.2 *Teorem 4.10'da bulunan eşitsizlik $M_1(\varphi) < +\infty$ koşulunu sağlamayan çekirdek fonksiyonları için kullanılamaz. Bu koşulu sağlamamasına rağmen $\alpha \in (0,1)$ için $M_\alpha(\varphi) < +\infty$ koşulunu sağlayan çekirdek fonksiyonları mevcuttur. Bu gibi durumlar için benzer bir eşitsizliği f fonksiyonunun α-nıncı dereceden* log-*Holderian olduğu durumlarda elde edebiliriz.*

Tanım 4.11 (log-**Holderian Eşitsizliği, Bardaro ve ark., 2017)** $x, y \in \mathbb{R}, \alpha \in (0,1)$ *olmak üzere*

$$|f(x) - f(y)| \leq C|\log(x) - \log(y)|^{\alpha}, \quad (x, y \in \mathbb{R}_+)$$

eşitsizliğini sağlayan $C > 0$ sayısı mevcut ise f fonksiyonuna log-Holderian denir.

Sonuç 4.2 *f'nin* log-*Holderian olması durumunda $(S_w^{\varphi} f)$'nin tanımı kullanılırsa ,*

$$|(S_w^{\varphi} f)(x) - f(x)| \leq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left|\varphi(e^{-k}x^w)\right| \left|f(e^{k/w}) - f(x)\right| \leq \frac{C}{w^{\alpha}} M_\alpha(\varphi)$$

elde edilir.

Sıradaki sonuç olarak $x \in \mathbb{R}_+$ için lokal olarak $C^{(n)}$ uzayına ait f fonksiyonları için kesin bir noktasal yaklaşım sıralaması veren asimptotik bir formül verilecektir. Bunu yapabilmek için $(\varphi.3_2)$ şartından biraz daha kuvvetli şartlara ihtiyaç vardır.

$(\varphi.3_3)$ Herhangi $0 \le j \le n$ için $m_j(\varphi) := m_j(\varphi, x)$, x'den bağımsız olsun.

$(\varphi.3_4)$ $M_n(\varphi) < +\infty$ ve

$$\lim_{r \to +\infty} \sum_{|k-\log(u)|>r} |\varphi(e^{-k}u)||k - \log(u)|^n = 0$$

$u \in \mathbb{R}_+$'ya göre düzgün olsun.

Belirtelim ki, $M_n(\varphi) < +\infty$ ise, $(\varphi.3_2)$ sağlanır. Gerçekten de,

$$\sum_{|k-\log(u)|>r} |\varphi(e^{-k}u)| \le \frac{1}{r^n} M_n(\varphi)$$

dir.

Teorem 4.11 (Bardaro ve ark., 2017) *$\varphi \in \Phi$ fonksiyonu $(\varphi.3_1), (\varphi.3_3), (\varphi.3_4)$ şartlarını sağlasın. $f \in C(\mathbb{R}_+)$ fonksiyonu $x \in \mathbb{R}_+$ için lokal olarak $C^{(n)}$ sınıfına aitse*

$$(S_w^{\varphi} f)(x) - f(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{(\Theta^j f)(x)}{j!} \frac{m_j(\varphi)}{w^j} + o(w^{-n}), \qquad (w \to +\infty)$$

dir.

İspat f'nin n-ninci dereceden Mellin-Taylor formülü kullanılırsa,

$$\begin{aligned} |(S_w^{\varphi} f)(x) - f(x)| = \Bigg| \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \varphi\left(e^{-k} x^w\right) \Bigg[\sum_{j=1}^{n} \frac{\left(\Theta^j f\right)(x)}{j!} \log^j \left(\frac{e^{k/w}}{x}\right) \\ + h\left(\frac{e^{k/w}}{x}\right) \log^n \left(\frac{e^{k/w}}{x}\right) \Bigg] \Bigg| \end{aligned}$$

yazabiliriz. Şimdi, sabit bir j için

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \varphi\left(e^{-k} x^w\right) \frac{\left(\Theta^j f\right)(x)}{j!} \log^j \left(\frac{e^{k/w}}{x}\right) = \frac{\left(\Theta^j f\right)(x)}{j!} \frac{m_j(\varphi)}{w^j}$$

bulunur. Bu durumda sadece kalan kısmı hesaplamak yeterlidir.

$$I := \left| \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \varphi\left(e^{-k} x^w\right) h\left(\frac{e^{k/w}}{x}\right) \log^n \left(\frac{e^{k/w}}{x}\right) \right|$$

alalım. Sabit bir $\varepsilon > 0$ için $\delta > 0$ alalım öyleki $|k - w\log(x)| \le \delta w$ için $\left|h\left(e^{k/w} x^{-1}\right)\right| < \varepsilon$ sağlansın. Bu durumda,

$$\begin{aligned} w^n I &< \varepsilon \sum_{|k-w\log(x)| \le \delta w} \left|\varphi\left(e^{-k} x^w\right)\right| |k - w\log(x)|^n \\ &+ \|h\|_{\infty} \sum_{|k-w\log(x)| \ge \delta w} \left|\varphi\left(e^{-k} x^w\right)\right| |k - w\log(x)|^n \\ &\le M_n(\varphi)\varepsilon + \|h\|_{\infty} \sum_{|k-w\log(x)| \ge \delta w} \left|\varphi\left(e^{-k} x^w\right)\right| |k - w\log(x)|^n \end{aligned}$$

bulunur. Sonuç olarak $(\varphi.3_4)$ şartı kullanılırsa, ispat tamamlanır. □

Buradan, yardımcı bir sonuç olarak sıradaki noktasal yakınsaklık sonucu elde edilebilir.

Sonuç 4.3 (Bardaro ve ark., 2017) *Teorem 4.11'in şartları altında,*

$$\lim_{w\to+\infty} w\left[(S_w^{\varphi}f)(x)-f(x)\right]=\Theta^1 f(x)m_1(\varphi)$$

elde edilir. Dahası, $1\leq j\leq n-1$ *için* $m_j(\varphi)=0$ *ise*

$$\lim_{w\to+\infty} w^n\left[(S_w^{\varphi}f)(x)-f(x)\right]=\frac{\Theta^n f(x)}{n!}m_n(\varphi)$$

elde edilir.

Mellin bant sınırlı olmayan sinyal fonksiyonlarının yeniden inşa edilmesinde exponansiyel sampling serilerinin önemi ortaya çıkmaktadır. Fakat exponansiyel sampling serilerilerinde ihtiyaç duyulan $e^{k/w}$ noktalarındaki örnek değerlere her zaman sahip olmak mümkün değildir. Buradan hareketle Angamuthu ve Bajpeyi (2020)'nin, $f(e^{k/w})$ örnek değerleri yerine $\left[\frac{k}{w},\frac{k+1}{w}\right]$ aralığında $f\circ e^{(\cdot)}$ fonksiyonunun ortalama değerini kullanarak tanımladıkları exponansiyel sampling Kantorovich serileri (ESKS) ifade edilecektir. Fakat buna geçmeden önce birkaç tanım verilecektir.

$\chi:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ sürekli çekirdek fonksiyonu olsun. Bu durumda, $v\in\mathbb{N}_0$ için v-ninci dereceden cebirsel moment

$$m_v(\chi,u):=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\chi(e^{-k}u)(k-\log(u))^v,\quad (\forall u\in\mathbb{R}_+)$$

ve v-ninci dereceden mutlak moment

$$M_v(\chi,u):=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|\chi(e^{-k})u||k-\log(u)|^v,\quad (\forall u\in\mathbb{R}_+)$$

olarak tanımlanmaktadır. Ayrıca, $M_v(\chi):=\sup_{u\in\mathbb{R}_+}M_v(\chi,u)$ alınacaktır.

$(\chi.4_1)$ Her $u\in\mathbb{R}_+$ için

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\chi(e^{-k}u)=1.$$

$(\chi.4_2)$ $M_1(\chi)<+\infty$ ve

$$\lim_{\gamma\to+\infty}\sum_{|k-\log(u)|>\gamma}|\chi(e^{-k}u)||k-\log(u)|=0$$

yakınsaması $u\in\mathbb{R}_+$'ya göre düzgündür.

Not 4.3 *Buradaki* $(\chi.4_2)$ *şartından*

$$\lim_{\gamma\to+\infty} \sum_{|k-\log(u)|>\gamma} |\chi(e^{-k}u)| = 0$$

elde edilebilir. Gerçekten de,

$$\begin{aligned}\lim_{\gamma\to+\infty} \sum_{|k-\log(u)|>\gamma} \left|\chi\left(e^{-k}u\right)\right| &= \lim_{\gamma\to+\infty} \sum_{|k-\log(u)|>\gamma} \left|\chi\left(e^{-k}u\right)\right| |k-\log(u)| \frac{1}{|k-\log(u)|} \\ &\leq \lim_{\gamma\to+\infty} \frac{1}{\gamma} \sum_{|k-\log(u)|>\gamma} \left|\chi\left(e^{-k}u\right)\right| |k-\log(u)|\end{aligned}$$

olduğu görülmektedir.

Tanım 4.12 (ESKS, Angamuthu ve Bajpeyi, 2020) $x \in \mathbb{R}_+, w > 0$ *ve* χ *çekirdek fonksiyonu* $(\varphi.4_1), (\varphi.4_2)$ *şartlarını sağlasın. Bu durumda exponansiyel sampling serilerinin Kantorovich versiyonları,* $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *her* $x \in \mathbb{R}_+$ *için seriyi mutlak yakınsak yapan lokal integrallenebilir bir fonksiyon olmak üzere,*

$$(I_w^\chi f)(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \chi(e^{-k}x^w) w \int_{k/w}^{(k+1)/w} f(e^u)du \tag{4.16}$$

olarak tanımlanır.

Şimdi, (4.16) serileri için verilmiş birkaç sonuç ispatları ile birlikte ifade edilecektir.

Teorem 4.12 (Angamuthu ve Bajpeyi, 2020) $f \in M(\mathbb{R}_+) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ *olsun. Bu durumda* (4.16) *serileri* f*'nin sürekli olduğu her* $x \in \mathbb{R}_+$ *noktasında* f*'ye yakınsar. Dahası,* $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+)$ *ise bu yakınsama düzgündür. Yani,*

$$\lim_{w\to+\infty} ||I_w^\chi f - f||_\infty = 0$$

dır.

İspat $(\varphi.4_1)$ şartı kullanılırsa,

$$\begin{aligned}|(I_w^\chi f)(x) - f(x)| =& \left|\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \chi\left(e^{-k}x^w\right) w \int_{\frac{k}{w}}^{\frac{k+1}{w}} \left(f\left(e^u\right) - f(x)\right) du\right| \\ \leq& \left(\sum_{|k-w\log(x)|<\frac{w\delta}{2}} + \sum_{|k-w\log(x)|\geq\frac{w\delta}{2}}\right) \left|\chi\left(e^{-k}x^w\right)\right| w \int_{\frac{k}{w}}^{\frac{k+1}{w}} |\, f\left(e^u\right) - f(x)\,|\, du \\ :=& I_1 + I_2\end{aligned}$$

dır. $f \in \mathcal{C}\left(\mathbb{R}_+\right)$ kabulünden, her $\varepsilon > 0$ için bir $\delta > 0$ vardır öyle ki

$$|u - \log(x)| < \delta \qquad \text{için} \qquad |f(e^u) - f(x)| < \varepsilon$$

sağlanır. Her $w > w'$ için $\frac{1}{w} < \frac{\delta}{2}$ olacak şekilde bir w' sabitini göz önüne alalım. Şimdi, $u \in \left[\frac{k}{w}, \frac{k+1}{w}\right]$ ve $w > w'$ için $|\frac{k}{w} - \log(x)| < \frac{\delta}{2}$ olduğunda

$$|u - \log(x)| \leq \left|u - \frac{k}{w}\right| + \left|\frac{k}{w} - \log(x)\right| \leq \delta$$

yazılabilir. Buradan $|I_1| < \varepsilon M_0(\chi)$ elde edilir. Benzer şekilde,

$$|I_2| \leq 2\|f\|_\infty \sum_{|k - w\log(x)| \geq \frac{w\delta}{2}} \left|\chi\left(e^{-k}x^w\right)\right|$$

bulunur ki, Not 4.3 kullanılırsa, $|I_2| \leq 2\|f\|_\infty \varepsilon$ elde edilir. Burada I_1 ve I_2 eşitsizlikleri birleştirildiğinde ispat tamamlanır. □

Şimdi, $(I_w^\chi f)_{w>0}$ exponansiyel sampling Kantorovich serileri için asimptotik bir sonuç verilecektir.

Teorem 4.13 (Angamuthu ve Bajpeyi, 2020) *$f \in C^{(1)}(\mathbb{R}_+)$ ve χ çekirdek fonksiyonu olsun öyle ki birinci dereceden momenti her $x \in \mathbb{R}_+$ için sıfır olsun. Bu durumda,*

$$\lim_{w \to +\infty} w\left[(I_w^\chi f)(x) - f(x)\right] = \frac{(\Theta f)(x)}{2}$$

dir.

İspat $f \in C^{(1)}(\mathbb{R}_+)$ için birinci dereceden Mellin türevi, h sınırlı fonksiyonu $\lim_{t \to 1} h(t) = 0$ özelliğini sağlamak olmak üzere,

$$f(e^u) = f(x) + (\theta f)(x)(u - \log(x)) + h\left(\frac{e^u}{x}\right)(u - \log(x))$$

olarak yazılabilir (Butzer ve Jansche, 1997; Bardaro ve ark., 2017). (4.16) gözönüne alınırsa,

$$\begin{aligned}(I_w^\chi f)(x) - f(x) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \chi\left(e^{-k}x^w\right) w \int_{\frac{k}{w}}^{\frac{k+1}{w}} \left[(\theta f)(x)(u - \log(x)) + h\left(\frac{e^u}{x}\right)(u - \log(x))\right] du \\ &:= I_1 + I_2\end{aligned}$$

yazılabilir. İlk olarak I_1'i hesaplayalım.

$$\begin{aligned} I_1 &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \chi\left(e^{-k}x^w\right) w \int_{\frac{k}{w}}^{\frac{k+1}{w}} [(\theta f)(x)(u - \log(x))] du \\ &= (\theta f)(x) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \chi\left(e^{-k}x^w\right) w \int_{\frac{k}{w}}^{\frac{k+1}{w}} (u - \log(x)) du \\ &= \frac{(\theta f)(x)}{2w}. \end{aligned}$$

Şimdi I_2'yi hesaplayalım. Bunu yapabilmek için $\varepsilon > 0$ sabit olsun. Bu durumda öyle bir $\delta > 0$ vardır ki $|t-1| < \delta$ ise $|h(t)| < \varepsilon$'dır. Dahası, her $w > w'$ için $\frac{1}{w} < \frac{\delta}{2}$ olacak şekilde bir w' seçelim. Bu durumda,

$$\begin{aligned}|I_2| \leq & \sum_{|k-w\log(x)|<\frac{w\delta}{2}} \left|\chi\left(e^{-k}x^w\right)\right| \left| w\int_{\frac{k}{w}}^{\frac{k+1}{w}} \left[h\left(\frac{e^u}{x}\right)(u-\log(x))\right] du\right| \\ & + \sum_{|k-w\log(x)|\geq\frac{w\delta}{2}} \left|\chi\left(e^{-k}x^w\right)\right| \left| w\int_{\frac{k}{w}}^{\frac{k+1}{w}} \left[h\left(\frac{e^u}{x}\right)(u-\log(x))\right] du\right| \\ & := I_2' + I_2''\end{aligned}$$

yazılabilir. İlk olarak I_2''yi dikkate alalım. Her $u \in \left[\frac{k}{w}, \frac{k+1}{w}\right]$ için $\left|\frac{k}{u} - \log(x)\right| < \frac{\delta}{2}$ olduğunda

$$|u-\log(x)| \leq \left|u - \frac{k}{w}\right| + \left|\frac{k}{w} - \log(x)\right| \leq \delta$$

sağlanır. Buradan

$$|wI_2'| \leq \frac{\varepsilon}{2}\left(M_0(\chi) + 2M_1(\chi)\right)$$

elde edilir. Şimdi, I_2'' için h'ın sınırlılığı ve Not 4.3 kullanılırsa,

$$\begin{aligned}|I_2''| &\leq \|h\|_\infty \sum_{|k-w\log(x)|\geq\frac{w\delta}{2}} \left|\chi\left(e^{-k}x^w\right) w\int_{\frac{k}{w}}^{\frac{k+1}{w}} (u-\log(x))du\right| \\ &\leq \frac{3\varepsilon\|h\|_\infty}{2w}\end{aligned}$$

elde edilmiş olur. Sonuç olarak $|wI_2''| \leq \dfrac{3\varepsilon\|h\|_\infty}{2}$ bulunur. I_1 ve I_2 eşitsizlikleri birleştirildiğinde ispat tamamlanır. $\square$

Şimdi, (4.16) serileri için yakınsaklık hızı sonucu sunulacaktır.

Teorem 4.14 (Angamuthu ve Bajpeyi, 2020) $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+)$ *olsun. Bu durumda, herhangi* $\delta > 0$ *için*

$$\left|\left(I_w^\chi f\right)(x) - f(x)\right| \leq \omega(f,\delta)\left(M_0(\chi)\left(1+\frac{1}{2w\delta}\right) + \frac{M_1(\chi)}{w\delta}\right)$$

eşitsizliği mevcuttur.

İspat Herhangi $\delta > 0$ için logaritmik süreklilik modülünün Lemma 4.1'de verilmiş olan (iii)

özelliği kullanılırsa,

$$
\begin{aligned}
\left|\left(I_w^\chi f\right)(x)-f(x)\right| &\leq \omega(f,\delta)\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left|\chi\left(e^{-k}x^w\right)\right| w\int_{\frac{k}{w}}^{\frac{k+1}{w}}\left(1+\frac{|u-\log(x)|}{\delta}\right)du\\
&\leq \omega(f,\delta)\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left|\chi\left(e^{-k}x^w\right)\right|\right.\\
&\left.+\frac{w}{\delta}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left|\chi\left(e^{-k}x^w\right)\right|\int_{\frac{k}{w}}^{\frac{k+1}{w}}|u-\log(x)|du\right)\\
&\leq \omega(f,\delta)\left(M_0(\chi)\left(1+\frac{1}{2w\delta}\right)+\frac{M_1(\chi)}{w\delta}\right)
\end{aligned}
$$

yazılabilir. İspat tamamlanmış olur. □

Not 4.4 (Angamuthu ve Bajpeyi, 2020) *Sabit bir $w>0$ için $\delta=\frac{1}{w}$ seçilirse, Teorem 4.14*

$$
\left|\left(I_w^\chi f\right)(x)-f(x)\right| \leq \lambda\omega\left(f,\frac{1}{w}\right), \lambda:=\left(\frac{3M_0(\chi)+2M_1(\chi)}{2}\right)
$$

olarak ifade edilebilir.

Sırada tanıtacağımız operatörler ailesi, (4.14) serilerinin iki değişkenli fonksiyonlar uzayında Bardaro ve ark. (2019) tarafından verilen genelleştirilmesidir. Fakat buna geçmeden önce ihtiyaç duyulacak notasyonları tanıtalım.

$\mathbf{k}=(k_1,k_2)\in\mathbb{R}^2$ (veya iki boyutlu herhangi bir vektör uzayı) bir vektör olmak üzere $|\mathbf{k}|:=k_1+k_2$, $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{R}^2$ olmak üzere, her $i=1,2$ için $x_i>y_i$ sağlanıyorsa $\mathbf{x}>\mathbf{y}$, $\mathbf{0}:=(0,0)$ ve $\mathbf{1}:=(1,1)$ olarak alınacaktır. $\mathbb{R}^2$ üzerindeki standart toplama ve skaler ile çarpma işlemi, yani, $\mathbf{x}+\mathbf{y}:=(x_1+y_1,x_2+y_2)$ ve $\alpha\in\mathbb{R}$ için $\alpha\mathbf{x}:=(\alpha x_1,\alpha x_2)$ alınacaktır. Ayrıca, $\mathbf{xy}:=(x_1y_1,x_2y_2)$, $\dfrac{\mathbf{x}}{\mathbf{y}}:=\left(\dfrac{x_1}{y_1},\dfrac{x_2}{y_2}\right)$, $\mathbf{x}^{\mathbf{y}}:=\prod_{i=1}^{2}x_i^{y_i}$, $||\mathbf{x}||:=\sqrt{x_1^2+x_2^2}$ ve $d(\mathbf{x},\mathbf{y}):=||\mathbf{x}-\mathbf{y}||$ alınacaktır. $\mathbf{w}\in\mathbb{R}^2$ için $\mathbf{w}\to+\infty$ ile $\mathbf{w}:=\min(w_1,w_2)\to+\infty$'yi ifade edeceğiz. Şimdi, Mellin anlamında $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{C}$ fonksiyonun kısmi türev notasyonunu verelim.

f fonksiyonunun $x_i, i=1,2$ değişkenlerine göre $\mathbf{x}=(x_1,x_2)$ noktasındaki birinci mertebeden kısmi Mellin türevi

$$
\Theta_{x_i}f(\mathbf{x}):=x_i\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i}
$$

olarak verilir (Bardaro ve ark., 2019). $\mathbf{k}=(k_1,k_2)\in\mathbb{N}_0^2$ için $\mathbf{x}$ noktasındaki $r=|\mathbf{k}|=k_1+k_2$-ninci mertebeden Mellin türevi

$$
\Theta^r_{x_1^{k_1}x_2^{k_2}}f(\mathbf{x}):=\Theta^{k_1}_{x_1}\left(\Theta^{k_2}_{x_2}f\right)(\mathbf{x})
$$

olarak verilir (Bardaro ve ark., 2019).

$\Theta^1_{x_i} f(\mathbf{x}) := \Theta_{x_i} f(\mathbf{x})$, $\Theta^0_{x_i} f(\mathbf{x}) := f(\mathbf{x})$ denilebilir. Örneğin,

$$\Theta^2_{x_i} = \Theta_{x_i}\left(\Theta_{x_i} f\right)(\mathbf{x}) = x_i \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i} + x_i^2 \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_i^2}.$$

Daha önce ifade ettiğimiz bir değişkenli Mellin-Taylor formülünü iki değişkenli hale genelleştirebilmek için aşağıdaki notasyondan yararlanacağız. $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ ve $\mathbf{t} = (t_1, t_2)$ için $m \in \mathbb{N}$ ve (x_1, x_2)'ye göre lokal olarak $f \in C^{(m)}\left(\mathbb{R}^2_+\right)$ olmak üzere

$$\left(\Theta_{x_1} \log(t_1) + \Theta_{x_2} \log(t_2)\right)^m f\left(x_1, x_2\right) \tag{4.17}$$

$$:= \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \Theta^{m-k}_{x_1}\left(\Theta^k_{x_2} f\right)\left(x_1, x_2\right) \log^{m-k}(t_1) \log^k(t_2). \tag{4.18}$$

Örneğin, $m = 2$ için

$$\begin{aligned}&\left(\Theta_{x_1} \log(t_1) + \Theta_{x_2} \log(t_2)\right)^2 f(x_1, x_2)\\ =&\Theta^2_{x_1} f(x_1, x_2) \log^2(t_1) + 2\Theta_{x_1}(\Theta_{x_2}) f(x_1, x_2) \log(t_1) \log(t_2) + \Theta^2_{x_2} f(x_1, x_2) \log^2(t_2)\end{aligned}$$

dir.

Mellin türevleri anlamında iki değişkenli bir fonksiyonun Mellin-Taylor açılımı aşağıdaki gibi verilmektedir.

Önerme 4.1 (Bardaro ve ark., 2019) *$m \in \mathbb{N}$ olmak üzere $f : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{C}$ fonksiyonu $C^{(m)}\left(\mathbb{R}^2_+\right)$ uzayına ait ve (θ, η) uç noktaları $\left(x_1, x_2\right), \left(t_1 x_1, t_2 x_2\right)$ olan L_{t_1, t_2} doğru parçasından uygun bir nokta olmak üzere,*

$$R_m\left(t_1, t_2\right) = \frac{1}{m!}\left(\Theta_{x_1} \log(t_1) + \Theta_{x_2} \log(t_2)\right)^m f(\theta, \eta)$$

olsun. Bu durumda, $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+$ ve $\mathbf{t} = (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2_+$ için

$$\begin{aligned} f\left(t_1 x_1, t_2 x_2\right) &= f\left(x_1, x_2\right) + \left(\Theta_{x_1} \log(t_1) + \Theta_{x_2} \log(t_2)\right) f\left(x_1, x_2\right)\\ &+ \frac{1}{2!}\left(\Theta_{x_1} \log(t_1) + \Theta_{x_2} \log(t_2)\right)^2 f\left(x_1, x_2\right)\\ &+ \ldots + \frac{1}{(m-1)!}\left(\Theta_{x_1} \log(t_1) + \Theta_{x_2} \log(t_2)\right)^{m-1} f\left(x_1, x_2\right) + R_m\left(t_1, t_2\right)\end{aligned}$$

olarak yazılabilir.

İspat İspat $m = 2$ için yapılacaktır. Genel durumu elde etmek için (4.17) uygulanabilir. $t \in [1, e]$ olmak üzere $F(t) = f\left(t_1^{\log(t)} x_1, t_2 \log(t) x_2\right)$ fonksiyonunu alalım. Bir değişkenli Lagrange kalan terimli Mellin-Taylor formülü uygulanırsa, $\tilde{t} \in (1, e)$ olmak üzere

$$F(t) = F(1) + \Theta F(1) \log(t) + \frac{\Theta^2 F(\tilde{t})}{2} \log^2(t)$$

elde edilir. Diğer taraftan,

$$\Theta F(t) = \frac{\partial f}{\partial x_1}\left(t_1^{\log(t)}x_1, t_2^{\log(t)}x_2\right) x_1 t_1^{\log(t)} \log(t_{1)} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\left(t_1^{\log(t)}x_1, t_2^{\log(t)}x_2\right) x_2 t_2^{\log(t)} \log(t_2)$$

yazılabilir ve $t = 1$ için

$$\Theta F(1) = \Theta_{x_1} f(x_1, x_2) \log(t_1) + \Theta_{x_2} f(x_1, x_2) \log(t_2) = (\Theta_{x_1} \log t_1 + \Theta_{x_2} \log(t_2)) f(x_1, x_2)$$

elde edilir. Benzer şekilde $\Theta^2 F(t) = tF'(t) + t^2 F''(t)$ için

$$\begin{aligned}\Theta^2 F(t) =& \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\left(t_1^{\log(t)}x_1, t_2 \log(t_{x_2})\right) x_1^2 t_1^{2\log(t)} \log^2(t_1) + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\left(t_1^{\log(t)}x_1, t_2 \log(t_{x_2})\right) x_2^2 t_2^{2\log(t)} \log^2(t_2)\\ &+2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x_1}\left(t_1^{\log(t)}x_1, t_2^{\log(t)}x_2\right) x_1 x_2 (t_1 t_2)^{\log(t)} \log(t_1)\log(t_2)\\ &+\frac{\partial f}{\partial x_1}(t_1 \log(t_{x_1}), t_2 \log(t_{x_2})) x_1 t_1 \log(t) \log^2(t_1) + \frac{\partial f}{\partial x_2}\left(t_1^{\log(t)}x_1, t_2^{\log(t)}x_2\right) x_2 t_2 \log(t) \log^2(t_2)\end{aligned}$$

yazılabilir ve $t = \tilde{t}$ için $(\theta, \eta) = \left(t_1^{\log(\tilde{t})}x_1, t_2^{\log(\tilde{t})}x_2\right) \in L_{t_1,t_2}$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\frac{\Theta^2 F(\tilde{t})}{2} =& \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\theta,\eta)\theta^2 + \frac{\partial f}{\partial x_1}(\theta,\eta)\theta\right)\log^2(t_1) + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(\theta,\eta)\eta^2 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\theta,\eta)\eta\right)\log^2(t_2)\right.\\ &\left.+2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\theta,\eta)\theta\eta \log(t_1)\log(t_2)\right\}\end{aligned}$$

dır. Şimdi kısmi Mellin türev tanımını kullanarak

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\theta,\eta)\theta^2 &= \left[\Theta_{x_1}^2 f(\theta,\eta) - \Theta_{x_1} f(\theta,\eta)\right]\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(\theta,\eta)\eta^2 &= \left[\Theta_{x_2}^2 f(\theta,\eta) - \Theta_{x_2} f(\theta,\eta)\right]\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\theta,\eta)\theta\eta &= \Theta_{x_1}(\Theta_{x_2} f)(\theta,\eta)\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\frac{\Theta^2 F(\tilde{t})}{2} = \frac{1}{2}(\Theta_{x_1}\log(t_1) + \Theta_{x_2}\log(t_2))^2 f(\theta,\eta)$$

elde edilir ki ispat tamamlanmış olur. □

Önerme 4.1'den hareketle, Peano kalan terimli Mellin Taylor formülü de tanımlanabilir. Bunun için kullanılan ek önermeyi ispatı ile birlikte ifade edelim.

Önerme 4.2 (Bardaro ve ark., 2019) *Önerme 4.1 ile aynı kabüller altında,*

$$\lim_{(t_1,t_2)\to(1,1)} \frac{(\Theta_{x_1}\log(t_1) + \Theta_{x_2}\log(t_2))^m f(\theta,\eta) - (\Theta_{x_1}\log(t_1) + \Theta_{x_2}\log(t_2))^m f(x_1,x_2)}{\left(\log^2(t_1) + \log^2(t_2)\right)^{m/2}} = 0$$

dir.

İspat İspat $m=2$ için yapılacaktır, genel durum benzer şekilde ilerletilebilir.

$$I:=\left|\left(\Theta_{x_1}\log(t_1)+\Theta_{x_2}\log(t_2)\right)^2 f(\theta,\eta)-\left(\Theta_{x_1}\log(t_1)+\Theta_{x_2}\log(t_2)\right)^2 f\left(x_1,x_2\right)\right|$$

alınırsa,

$$\begin{aligned}I &\leq \left|\Theta_{x_1}^2 f(\theta,\eta)-\Theta_{x_1}^2 f\left(x_1,x_2\right)\right|\log^2(t_1)\\&+2\left|\Theta_{x_1}\left(\Theta_{x_2}f\right)(\theta,\eta)-\Theta_{x_1}\left(\Theta_{x_2}f\right)(x_1,x_2)\right|\left|\log(t_1)\log(t_2)\right|\\&+\left|\Theta_{x_2}^2 f(\theta,\eta)-\Theta_{x_2}^2 f\left(x_1,x_2\right)\right|\log^2(t_2)\end{aligned}$$

yazılabilir ve sonuç olarak,

$$\begin{aligned}\frac{I}{\log^2(t_1)+\log^2(t_2)} &\leq \left|\Theta_{x_1}^2 f(\theta,\eta)-\Theta_{x_1}^2 f\left(x_1,x_2\right)\right|+\left|\Theta_{x_1}\left(\Theta_{x_2}f\right)(\theta,\eta)-\Theta_{x_1}\left(\Theta_{x_2}f\right)(x_1,x_2)\right|\\&+\left|\Theta_{x_2}^2 f(\theta,\eta)-\Theta_{x_2}^2 f\left(x_1,x_2\right)\right|\end{aligned}$$

elde edilir. $(\theta,\eta)\in L_{t_1,t_2}$ olduğu dikkate alınırsa, $f\in C^{(2)}\left(\mathbb{R}_+^2\right)$ kabulünden ispat tamamlanır.
$\square$

Önerme 4.2 dikkate alınarak, Peano kalan terimli Mellin Taylor formülü

$$\begin{aligned}f\left(t_1x,t_2y\right) &= f\left(x_1,x_2\right)+\left(\Theta_{x_1}\log(t_1)+\Theta_{x_2}\log(t_2)\right)f\left(x_1,x_2\right)\\&+\frac{1}{2!}\left(\Theta_{x_1}\log(t_1)+\Theta_{x_2}\log(t_2)\right)^2 f\left(x_1,x_2\right)\\&+\ldots+\frac{1}{m!}\left(\Theta_{x_1}\log(t_1)+\Theta_{x_2}\log(t_2)\right)^m f\left(x_1,x_2\right)+R_m\left(t_1,t_2\right)\end{aligned}$$

olarak yazılabilir. Burada Peano kalan terimi $R_m\left(t_1,t_2\right)$, $\lim\limits_{(t_1,t_2)\to(1,1)} H\left(t_1,t_2\right)=0$ olacak şekilde $H\left(t_1,t_2\right)$ sınırlı fonksiyonu için

$$R_m\left(t_1,t_2\right)=H\left(t_1,t_2\right)\left(\log^2(t_1)+\log^2(t_2)\right)^{m/2}$$

dir.

$\varphi:\mathbb{R}_+^2\to\mathbb{R}$ sürekli fonksiyonu

$(\varphi.1)$ Her $\mathbf{x}\in\mathbb{R}_+^2$ için

$$\sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^2}\varphi(e^{-\mathbf{k}}\mathbf{x})=\sum_{(k_1,k_2)\in\mathbb{Z}^2}\varphi(e^{-k_1}x_1,e^{-k_2}x_2)=1,$$

$(\varphi.2)$

$$M_0(\varphi):=\sup_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}_+^2}\sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^2}\left|\varphi(e^{-\mathbf{k}}\mathbf{x})\right|<+\infty,$$

(φ.3)

$$\lim_{r\to+\infty} \sum_{||k-\log(\mathbf{x})||\geq r} |\varphi(e^{-\mathbf{k}}\mathbf{x})| = 0, \qquad \mathbf{x}\text{'e göre düzgün}$$

şartlarını sağlasın. Bu şartları sağlayan φ fonksiyonlarının sınıfını $\widetilde{\Phi}$ ile gösterelim.

$\mathbf{j} = (j_1, j_2) \in \mathbb{N}_0^2$ ve $\nu = |\mathbf{j}|$ olsun. $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^2$ için $\varphi \in \widetilde{\Phi}$'nin $\mathbf{j}$-ninci dereceden cebirsel momenti

$$\begin{aligned} m_{\mathbf{j}}^{\nu}(\varphi, \mathbf{x}) &:= \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^2} \varphi\left(e^{-\mathbf{k}}\mathbf{x}\right) \log^{\mathbf{j}}\left(e^{\mathbf{k}}\mathbf{x}^{-1}\right) = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^2} \varphi\left(e^{-\mathbf{k}}\mathbf{x}\right) (\mathbf{k} - \log(\mathbf{x}))^{\mathbf{j}} \\ &= \sum_{(k_1,k_2)\in\mathbb{Z}^2} \varphi\left(e^{-k_1}x_1, e^{-k_2}x_2\right) (k_1 - \log(x_1))^{j_1} (k_2 - \log(x_2))^{j_2} \end{aligned}$$

ve $\mathbf{j}$-ninci dereceden mutlak momenti

$$\begin{aligned} M_{\mathbf{j}}^{\nu}(\varphi, \mathbf{x}) &:= \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^2} \left|\varphi\left(e^{-\mathbf{k}}\mathbf{x}\right)\right| \left[\log\left(e^{\mathbf{k}}\mathbf{x}^{-1}\right)\right]^{\mathbf{j}} = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^2} \left|\varphi\left(e^{-\mathbf{k}}\mathbf{x}\right)\right| [\mathbf{k} - \log(\mathbf{x})]^{\mathbf{j}} \\ &= \sum_{(k_1,k_2)\in\mathbb{Z}^2} \left|\varphi\left(e^{-k_1}x_1, e^{-k_2}x_2\right)\right| |k_1 - \log(x_1)|^{j_1} |k_2 - \log(x_2)|^{j_2} \end{aligned}$$

olarak tanımlanır. Son olarak $M_{\mathbf{j}}^{\nu}(\varphi) := \sup_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}_+^2} M_{\mathbf{j}}^{\nu}(\varphi, \mathbf{x})$'dir.

Tanım 4.13 (İki değişkenli exponansiyel sampling serileri, Bardaro ve ark., 2019) $\varphi \in \widetilde{\Phi}$ *olsun. Herhangi* $\mathbf{w} > 0, \mathbf{w} = (w_1, w_2)$ *ve* $f : \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{C}$ *fonksiyonu için iki değişkenli exponansiyel sampling serisi,*

$$\begin{aligned} \left(E_{\mathbf{w}}^{\varphi} f\right)(\mathbf{x}) &:= \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^2} f\left(e^{\frac{\mathbf{k}}{\mathbf{w}}}\right) \varphi\left(e^{-\mathbf{k}}\mathbf{x}^{\mathbf{w}}\right) \\ &= \sum_{(k_1,k_2)\in\mathbb{Z}^2} f\left(e^{\frac{k_1}{w_1}}, e^{\frac{k_2}{w_2}}\right) \varphi\left(e^{-k_1}x_1^{w_1}, e^{-k_2}x_2^{w_2}\right) \end{aligned}$$

olarak tanımlanır. Burada $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2$ *ve* f *her* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^2$ *için seriyi mutlak yakınsak yapan bir fonksiyondur.*

$\widetilde{\Phi}$ sınıfının tanımı kullanılarak yukarıdaki serilerin sınırlı fonksiyonlar için mutlak yakınsak seri olarak iyi tanımlılığı gösterilebilir. Şimdi, noktasal yakınsaklık sonucunu vererek başlayalım.

Teorem 4.15 (Bardaro ve ark., 2019) $f \in C\left(\mathbb{R}_+^2\right)$ *ve* $\varphi \in \widetilde{\Phi}$ *olsun. Bu durumda,*

$$\lim_{\mathbf{w}\to+\infty} \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^2} f\left(e^{\frac{\mathbf{k}}{\mathbf{w}}}\right) \varphi\left(e^{-\mathbf{k}}\mathbf{x}^{\mathbf{w}}\right) = f(\mathbf{x}), \quad \left(\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^2\right) \tag{4.19}$$

dir.

İspat $\varphi \in \widetilde{\Phi}$ olduğundan,

$$\left| \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^2} f\left(e^{\frac{\mathbf{k}}{\mathbf{w}}}\right) \varphi\left(e^{-\mathbf{k}}\mathbf{x}^{\mathbf{w}}\right) - f(\mathbf{x}) \right| \leq \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^2} \left| f\left(e^{\frac{\mathbf{k}}{\mathbf{w}}}\right) - f(\mathbf{x}) \right| \left|\varphi\left(e^{-\mathbf{k}}\mathbf{x}^{\mathbf{w}}\right)\right|$$

yazılabilir. $\varepsilon > 0$ için f'nin $\mathbf{x}$ noktasındaki sürekliliğinden, $\delta > 0$ bulunabilir öyle ki

$$\left\| \log(\mathbf{x}) - \log\left(e^{\frac{\mathbf{k}}{\mathbf{w}}}\right) \right\| = \left\| \log(\mathbf{x}) - \frac{\mathbf{k}}{\mathbf{w}} \right\| < \delta$$

olduğunda

$$\left| f(\mathbf{x}) - f\left(e^{\frac{\mathbf{k}}{\mathbf{w}}}\right) \right| < \varepsilon$$

dir. Diğer taraftan operatörün tanımı kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^2} \left| f\left(e^{\frac{\mathbf{k}}{\mathbf{w}}}\right) - f(\mathbf{x}) \right| \left|\varphi\left(e^{-\mathbf{k}}\mathbf{x}^{\mathbf{w}}\right)\right| &= \left\{ \sum_{\left\|\frac{\mathbf{k}}{\mathbf{w}} - \log(\mathbf{x})\right\| < \delta} + \sum_{\left\|\frac{\mathbf{k}}{\mathbf{w}} - \log(\mathbf{x})\right\| \geq \delta} \right\} \\ &\quad \times \left| f\left(e^{\frac{\mathbf{k}}{\mathbf{w}}}\right) - f(\mathbf{x}) \right| \left|\varphi\left(e^{-\mathbf{k}}\mathbf{x}^{\mathbf{w}}\right)\right| \\ &=: I_1 + I_2 \end{aligned}$$

yazabiliriz. Şimdi, $(\varphi.2)$ şartından $I_1 \leq M_0(\varphi)\varepsilon$ elde edilir. I_2 için

$$\left\| \frac{\mathbf{k}}{\mathbf{w}} - \log(\mathbf{x}) \right\| \leq \frac{\|\mathbf{k} - \log(\mathbf{x}^{\mathbf{w}})\|}{\mathbf{w}}$$

olduğu göz önüne alınırsa, f'nin sınırlılığından ve $(\varphi.3)$'den, yeterince büyük $\mathbf{w}$'lar için

$$I_2 = \sum_{\left\|\frac{\mathbf{k}}{\mathbf{w}} - \log(\mathbf{x})\right\| \geq \delta} \left| f(e^{\frac{\mathbf{k}}{\mathbf{w}}}) - f(\mathbf{x}) \right| \left|\varphi(e^{-\mathbf{k}}\mathbf{x}^{\mathbf{w}})\right| \leq 2\|f\|_\infty \sum_{\|\mathbf{k} - \log(\mathbf{x}^{\mathbf{w}})\| \geq \delta \mathbf{w}} \left|\varphi(e^{-\mathbf{k}}\mathbf{x}^{\mathbf{w}})\right| < 2\|f\|_\infty \varepsilon$$

elde edilir ve ispat tamamlanmış olur. □

Benzer adımlar izlenerek aşağıdaki düzgün yakınsaklık sonucu kanıtlanabilir.

Teorem 4.16 (Bardaro ve ark., 2019) $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^2_+)$ *ve* $\varphi \in \widetilde{\Phi}$ *olsun. Bu durumda*

$$\lim_{\mathbf{w}\to+\infty} \|E^{\varphi}_{\mathbf{w}} f - f\|_\infty = 0$$

dır.

Tanım 4.14 (Logaritmik süreklilik modülü, Bardaro ve ark., 2019) $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^2_+)$ *olmak üzere* $\delta > 0$ *sayıları için iki değişkenli fonksiyonlar uzayındaki logaritmik süreklilik modülü*

$$\omega(f, \delta) := \sup\left\{ |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| : \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2_+, \quad \|\log(\mathbf{x}) - \log(\mathbf{y})\| \leq \delta \right\} \tag{4.20}$$

olarak tanımlanır.

Şimdi yakınsaklık hızı ile ilgili sonuçları ifade edelim.

Teorem 4.17 (Bardaro ve ark., 2019) $f \in \mathcal{C}\left(\mathbb{R}_+^2\right), \varphi \in \widetilde{\Phi}$ *ve*

$$D := \sup_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}_+^2} \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^2} \left|\varphi\left(e^{-\mathbf{k}}\mathbf{x}\right)\right| \|\mathbf{k} - \log(\mathbf{x})\| < +\infty$$

ise her $\mathbf{w} > 0$ *ve* $\delta > 0$ *için*

$$\left|\sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^2} f\left(e^{\frac{\mathbf{k}}{\mathbf{w}}}\right)\varphi\left(e^{-\mathbf{k}}\mathbf{x}^{\mathbf{w}}\right) - f(\mathbf{x})\right| \leq M_0(\varphi)\omega(f,\delta) + D\frac{\omega(f,\delta)}{\delta\mathbf{w}}$$

yazılabilir.

İspat $\varphi \in \widetilde{\Phi}$ olduğu, (4.20) ve

$$\left\|\frac{\mathbf{k}}{\mathbf{w}} - \log(\mathbf{x})\right\| \leq \frac{\|\mathbf{k} - \log\left(\mathbf{x}^{\mathbf{w}}\right)\|}{\mathbf{w}}$$

eşitsizliği göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned}|E_{\mathbf{w}}^{\varphi}f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})| &\leq \omega(f,\delta)\left(\sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^2}\left|\varphi\left(e^{-\mathbf{k}}\mathbf{x}^{\mathbf{w}}\right)\right| + \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^2}\left|\varphi\left(e^{-\mathbf{k}}\mathbf{x}^{\mathbf{w}}\right)\right|\frac{\|\mathbf{k} - \log\left(\mathbf{x}^{\mathbf{w}}\right)\|}{\delta\mathbf{w}}\right)\\ &\leq \omega(f,\delta)M_0(\varphi) + \frac{\omega(f,\delta)}{\delta\mathbf{w}}D\end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanmış olur. □

Şimdi, f fonksiyonunun bazı lokal regülerlik varsayımları altında yaklaşım hızı tahminleri elde edilecektir. Fakat bunu yapabilmek için çekirdek fonksiyonu üzerinde daha güçlü şartlara ihtiyaç duyulmaktadır. $\ell \in \mathbb{N}$ olsun öyle ki her $\mathbf{j} \in \mathbb{N}_0^2$, $|\mathbf{j}| \leq \ell$ için

$(\varphi.4_4)$ $m_{\mathbf{j}}^{|\mathbf{j}|}(\varphi,\mathbf{x}) =: m_{\mathbf{j}}^{|\mathbf{j}|}(\varphi)$, $\mathbf{x}$'den bağımsız,

$(\varphi.4_5)$ $M_{\mathbf{j}}^{|\mathbf{j}|}(\varphi) < +\infty$ ve

$$\lim_{r\to+\infty} \sum_{\|\mathbf{k}-\log(\mathbf{x})\|>r} |\varphi(e^{-\mathbf{k}}\mathbf{x})| \, \|\mathbf{k} - \log(\mathbf{x})\|^{\ell} = 0$$

$\mathbf{x}$'e göre düzgün olsun.

$(\varphi.4_1), (\varphi.4_4), (\varphi.4_5)$ şartlarını sağlayan fonksiyonların sınıfını φ_ℓ ile gösterelim. $\ell = 2$ kabul ederek sıradaki sonucumuzu gösterelim.

Teorem 4.18 (Bardaro ve ark., 2019) $f : \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{C}$ *fonksiyonu* $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2$ *noktasında lokal olarak* $f \in C^{(2)}(\mathbb{R}_+^2)$ *olsun.* $\varphi \in \widetilde{\Phi}_\ell$ *ise* $\mathbf{w} = (w_1, w_2) > 0$ *için*

$$(E_{(w_1,w_2)}^{\varphi}f)(x_1,x_2) - f(x_1,x_2) = \sum_{\nu=1}^{2}\sum_{|h|=\nu}\left(\frac{\Theta^{\nu}f(x_1,x_2)}{\nu!}\frac{m_{\mathbf{h}}^{\nu}(\varphi)}{\mathbf{w}^{\mathbf{h}}}\right) + o(w^{-2}), \qquad (w \to +\infty)$$

dir.

İspat $\varphi \in \widetilde{\Phi}_2$ olduğundan, lokal Mellin Taylor formülü uygulanırsa,

$$\begin{aligned}
&\left(E^{\varphi}_{(w_1,w_2)} f\right)(x_1,x_2) - f(x_1,x_2) \\
&= \sum_{(k_1,k_2)\in\mathbb{Z}^2} \varphi\left(e^{-k_1} x_1^{w_1}, e^{-k_2} x_2^{w_2}\right) \left(\Theta_{x_1} \log\left(\frac{e^{\frac{k_1}{w_1}}}{x_1}\right) \Theta_{x_2} \log\left(\frac{e^{\frac{k_2}{w_2}}}{x_2}\right)\right) f(x_1,x_2) \\
&+ \frac{1}{2}\left(\Theta_{x_1} \log\left(\frac{e^{\frac{k_1}{w_1}}}{x_1}\right) + \Theta_{x_2} \log\left(\frac{e^{\frac{k_2}{w_2}}}{x_2}\right)\right)^2 f(x_1,x_2) \\
&+ H\left(\frac{e^{\frac{k_1}{w_1}}}{x_1}, \frac{e^{\frac{k_2}{w_2}}}{x_2}\right)\left(\log^2\left(\frac{e^{\frac{k_1}{w_1}}}{x_1}\right) + \log^2\left(\frac{e^{\frac{k_2}{w_2}}}{x_2}\right)\right) \\
&= \frac{1}{w_1}\Theta_{x_1} f(x_1,x_2)\, m^1_{(1,0)}(\varphi) + \frac{1}{w_2}\Theta_{x_2} f(x_1,x_2)\, m^1_{(0,1)}(\varphi) + \frac{1}{2}\frac{1}{w_1^2}\Theta^2_{x_1} f(x,y) m^2_{(2,0)}(\varphi) + \\
&+ \frac{1}{2}\frac{1}{w_2^2}\Theta^2_{x_2} f(x_1,x_2)\, m^2_{(0,2)}(\varphi) + \frac{1}{w_1}\frac{1}{w_2}\Theta_{x_1}\left(\Theta_{x_2} f\right)(x_1,x_2)\, m^2_{(1,1)}(\varphi) \\
&+ \sum_{(k_1,k_2)\in\mathbb{Z}^2} \varphi\left(e^{-k_1} x_1^{w_1}, e^{-k_2} x_2^{w_2}\right) H\left(\frac{e^{\frac{k_1}{w_1}}}{x_1}, \frac{e^{\frac{k_2}{w_2}}}{x_2}\right)\left(\log^2\left(\frac{e^{\frac{k_1}{w_1}}}{x_1}\right) + \log^2\left(\frac{e^{\frac{k_2}{w_2}}}{x_2}\right)\right) \\
&= \sum_{\nu=1}^{2} \sum_{|\mathbf{h}|=\nu} \left(\frac{\Theta^{\nu} f(x_1,x_2)}{\nu!} \frac{m^{\nu}_{\mathbf{h}}(\varphi)}{\mathbf{w}^{\mathbf{h}}}\right) \\
&+ \sum_{(k_1,k_2)\in\mathbb{Z}^2} \varphi\left(e^{-k_1} x_1^{w_1}, e^{-k_2} x_2^{w_2}\right) H\left(\frac{e^{\frac{k_1}{w_1}}}{x_1}, \frac{e^{\frac{k_2}{w_2}}}{x_2}\right)\left(\log^2\left(\frac{e^{\frac{k_1}{w_1}}}{x_1}\right) + \log^2\left(\frac{e^{\frac{k_2}{w_2}}}{x_2}\right)\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada, $(t_1,t_2) \to (1,1)$ için $H(t_1,t_2)$ sıfıra gider. Sonuç olarak $\varepsilon > 0$ için bir $\delta > 0$ vardır öyle ki $\left\|\log\left(e^{\mathbf{k}/\mathbf{w}}\right) - \log(\mathbf{x})\right\| < \delta$ ise

$$H\left(\frac{e^{k_1/w_1}}{x_1}, \frac{e^{k_2/w_2}}{x_2}\right) < \varepsilon$$

dir.

$$R := \sum_{(k_1,k_2)\in\mathbb{Z}^2} \varphi\left(e^{-k_1} x_1^{w_1}, e^{-k_2} x_2^{w_2}\right) H\left(\frac{e^{\frac{k_1}{w_1}}}{x_1}, \frac{e^{\frac{k_2}{w_2}}}{x_2}\right)\left(\log^2\left(\frac{e^{\frac{k_1}{w_1}}}{x_1}\right) + \log^2\left(\frac{e^{\frac{k_2}{w_2}}}{x_2}\right)\right)$$

denirse ve

$$\left\|\frac{\mathbf{k}}{\mathbf{w}} - \log(\mathbf{x})\right\| \le \frac{\left\|\mathbf{k} - \log\left(\mathbf{x}^{\mathbf{w}}\right)\right\|}{\mathbf{w}}$$

olduğu göz önüne alınırsa Teorem 4.19'deki gibi

$$\begin{aligned}
\mathbf{w}^2|R| &\leq \sum_{(k_1,k_2)\in\mathbb{Z}^2} \left|\varphi\left(e^{-k_1}x_1^{w_1}, e^{-k_2}x_2^{w_2}\right)\right| \left|H\left(\frac{e^{\frac{k_1}{w_1}}}{x_1}, \frac{e^{\frac{k_2}{w_2}}}{x_2}\right)\right| \|\mathbf{k}-\log\left(\mathbf{x}^{\mathbf{w}}\right)\|^2 \\
&\leq \left\{\sum_{\left\|\frac{\mathbf{k}}{\mathbf{w}}-\log(\mathbf{x})\right\|<\delta} + \sum_{\|\mathbf{k}-\log(\mathbf{x}^{\mathbf{w}})\|\geq\delta\mathbf{w}}\right\} \left|\varphi\left(e^{-k_1}x_1^{w_1}, e^{-k_2}x_2^{w_2}\right)\right| \\
&\times \left|H\left(\frac{e^{\frac{k_1}{w_1}}}{x_1}, \frac{e^{\frac{k_2}{w_2}}}{x_2}\right)\right| \|\mathbf{k}-\log\left(\mathbf{x}^{\mathbf{w}}\right)\|^2 \\
&= S_1 + S_2
\end{aligned}$$

elde edilir. $M_2(\varphi) := \max_{|\mathbf{j}|=2} M_{\mathbf{j}}^2(\varphi)$ denirse, $S_1 \leq 3M_2(\varphi)\varepsilon$ elde edilir. $(\varphi.5)$ ve H'ın sınırlılığından $S_2 \leq \|H\|_\infty\varepsilon$ elde edilir ve ispat tamamlanmış olur. $\square$

5. ANA SONUÇLAR

Ana sonuçları vermeden önce çok boyutlu uzaylarda kullanacağımız temel aritmetik işlemleri tanımlayacağız.

$k \in \mathbb{Z}^n$ olmak üzere $|\mathbf{k}| := k_1 + k_2 + \cdots + k_n$ olarak tanımlansın. Ayrıca, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)\,, \mathbf{y} = (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$ vektörleri her $i = 1, 2, ..., n$ için $x_i > y_i$ şartını sağlıyorsa $\mathbf{x} > \mathbf{y}$ olarak ve $\mathbf{0}$ ile $(0, 0, ..., 0) \in \mathbb{R}^n$ vektörünü, $\mathbf{1}$ ile $(1, 1, ..., 1) \in \mathbb{R}^n$ vektörünü, $\mathbb{R}^n_+$ ile $\mathbf{x} > \mathbf{0}$ vektörlerinin uzayını gösterelim. $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ için

1. $\mathbf{x} + \mathbf{y} := (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$
2. $\alpha\mathbf{x} := (\alpha x_1, \alpha x_2, ..., \alpha x_n)$
3. $\mathbf{xy} := (x_1y_1, x_2y_2, ..., x_ny_n)$
4. $(y_1, y_2, ..., y_n \neq 0)$ olmak üzere $\dfrac{\mathbf{x}}{\mathbf{y}} := \left(\dfrac{x_1}{y_1}, \dfrac{x_2}{y_2}, ..., \dfrac{x_n}{y_n}\right)$
5. $[\mathbf{x}] := (|x_1|\,, |x_2|\,, ..., |x_n|)$
6. $\alpha > 0$ olmak üzere $\alpha^{\mathbf{x}} := (\alpha^{x_1}, \alpha^{x_2}, ..., \alpha^{x_n})$
7. $\mathbf{x}^{\mathbf{y}} := \prod_{i=1}^{n} x_i^{y_i}$
8. $\mathbf{x} > 0$ olmak üzere $\log(\mathbf{x}) := (\log(x_1), \log(x_2), ..., \log(x_n))$

işlemleri tanımlansın. $\|\mathbf{x}\| := \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ...x_n^2}$ ile Öklid normunu ve $d\,(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ Öklid metriğini gösterelim. $\mathbf{w} = (w_1, w_2, ..., w_n) \in \mathbb{R}^n_+$ için $\mathbf{w} \to +\infty$ ile $\underline{w} := \min\{w_1, w_2, ..., w_n\} \to +\infty$ olmasını ifade edeceğiz. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ olsun. j-ninci terime vurgu yapmak için

$$x_j' = (x_1, ..., x_{j-1}, x_{j+1}, ..., x_n) \in \mathbb{R}^{n-1},\ \mathbf{x} = \left(x_j', x_j\right),\ f\,(\mathbf{x}) = f\left(x_j', x_j\right),$$

notasyonlarından yararlanacağız. Şimdi log-düzgün süreklilik tanımını da çok değişkenli fonksiyonlar uzayı için ifade edelim. $f : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{C}$ bir fonksiyon olsun. $\forall\varepsilon > 0$ için $\exists\delta > 0$ öyleki $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ için $||\log(\mathbf{x}) - \log(\mathbf{y})|| \leq \delta$ olduğunda $|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| < \varepsilon$ oluyorsa, f fonksiyonuna $\mathbb{R}^n_+$'de log-düzgün sürekli diyeceğiz. $\mathbb{R}^n_+$ kümesi üzerinde tüm log-düzgün sürekli fonksiyonların kümesi $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n_+)$ ile gösterilecektir.

Not 5.1 *$J \subset \mathbb{R}_+^n$ kompakt aralıkları için* log-*düzgün süreklilik ile klasik düzgün süreklilik denktir.*

5.1. Çok Değişkenli Exponansiyel Sampling Kantorovich Serileri

$\varphi : \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonu

$(\varphi.5_1)$ Her $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n$ için

$$\sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^n} \varphi\left(e^{-\mathbf{k}}\mathbf{x}\right) = \sum_{(k_1,k_2,...,k_n)\in\mathbb{Z}^n} \varphi\left(e^{-k_1}x_1, e^{-k_2}x_2, ..., e^{-k_n}x_n\right) = 1,$$

$(\varphi.5_2)$

$$M_0(\varphi) := \sup_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}_+^n} \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^n} \left|\varphi\left(e^{-\mathbf{k}}\mathbf{x}\right)\right| < +\infty,$$

$(\varphi.5_3)$

$$\lim_{r\to+\infty} \sum_{\|\mathbf{k}-\log(\mathbf{x})\|\geq r} \left|\varphi\left(e^{-\mathbf{k}}\mathbf{x}\right)\right| = 0, \text{ } \mathbf{x}\text{'e göre düzgün}$$

şartlarını sağlasın. Bu şartları sağlayan φ fonksiyonlarının sınıfını Φ' ile gösterelim. Şimdi çok değişkenli exponansiyel sampling Kantorovich serileri (ÇDESKS)'ni verelim.

Tanım 5.1 (ÇDESKS, Turgay ve ark., 2020) $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n, \mathbf{w} > 0$ *ve* $\varphi \in \Phi'$ *için* $f : \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}$, $\left[\frac{k_j}{w_j}, \frac{k_j+1}{w_j}\right]$ *aralığında lokal integrallenebilir ve aşağıdaki seriyi mutlak yakınsak kılan bir fonksiyon olmak üzere ÇDESKS*

$$\left(E_{\mathbf{w},j}^{\varphi} f\right)(\mathbf{x}) := \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^n} \varphi\left(e^{-\mathbf{k}}\mathbf{x}^{\mathbf{w}}\right) w_j \int_{k_j/w_j}^{(k_j+1)/w_j} f\left(e^{k_j'/w_j'}, e^u\right) du \tag{5.1}$$

veya

$$\left(E_{\mathbf{w},j}^{\varphi} f\right)(\mathbf{x}) := \sum_{(k_1,...,k_n)\in\mathbb{Z}^n} \varphi\left(e^{-k_1}x_1^{w_1}, ..., e^{-k_n}x_n^{w_n}\right) w_j \int_{k_j/w_j}^{(k_j+1)/w_j} f\left(e^{\frac{k_1}{w_1}}, ..., e^u, ...e^{\frac{k_n}{w_n}}\right) du$$

olarak tanımlanır.

Not 5.2 (5.1) *operatörü, f sınırlı fonksiyonları için iyi tanımlıdır. Gerçekten de, her* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n$ *için* $|f(\mathbf{x})| \leq L$ *ise* $(\varphi.5_2)$ *kullanılırsa,*

$$\begin{aligned}\left|\left(E_{\mathbf{w},j}^{\varphi} f\right)(\mathbf{x})\right| &\leq \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^n} \left|\varphi\left(e^{-\mathbf{k}}\mathbf{x}^{\mathbf{w}}\right)\right| w_j \int\limits_{k_j/w_j}^{(k_j+1)/w_j} \left|f\left(e^{k_j'/w_j'}, e^u\right)\right| du \\ &\leq L. \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \left|\varphi\left(e^{-\mathbf{k}}\mathbf{x}^{\mathbf{w}}\right)\right| \\ &< +\infty\end{aligned}$$

elde edilir.

Not 5.3 (5.1) *serisinin tanımı kullanılırsa, her* $x \in \mathbb{R}_+^n$ *için* $\widetilde{\mathbf{1}}(\mathbf{x}) := 1$ *kuralı ile verilen sabit fonksiyon için* $(E_{\mathbf{w},j}^{\varphi}\widetilde{\mathbf{1}})(\mathbf{x}) = 1$ *olduğu görülmektedir. Gerçekten de,* $(\varphi.5_1)$ *şartından*

$$\begin{aligned}(E_{\mathbf{w},j}^{\varphi}\widetilde{\mathbf{1}})(\mathbf{x}) &= \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^n} \varphi\left(e^{-\mathbf{k}}\mathbf{x}^{\mathbf{w}}\right) w_j \int\limits_{k_j/w_j}^{(k_j+1)/w_j} du \\ &= \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^n} \varphi\left(e^{-\mathbf{k}}\mathbf{x}^{\mathbf{w}}\right) \\ &= 1\end{aligned}$$

elde edilir.

5.1.1. Çok Değişkenli Exponansiyel Sampling Kantorovich Serilerinin Yakınsaklık Sonuçları

Bu bölümde $(E_{\mathbf{w},j}^{\varphi})$'nin yakınsaklık özellikleri verilecektir.

Teorem 5.1 (Turgay ve ark., 2020) $f : \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}$ *sınırlı ise, f'nin her bir* $\mathbf{x_0} \in \mathbb{R}_+^n$ *süreklilik noktasında her* $j = 1, ..., n$ *için*

$$\lim_{\mathbf{w}\to+\infty} \left(E_{\mathbf{w},j}^{\varphi} f\right)(\mathbf{x_0}) = f(\mathbf{x_0})$$

sağlanır.

İspat $\mathbf{x_0} \in \mathbb{R}_+^n$ noktasını f'nin bir süreklilik noktası olarak alalım ve $j = 1, ..., n$ sabitleyelim. O halde, $\forall\varepsilon > 0$ için bir $\delta > 0$ vardır öyleki her $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n$ için $\|\log(\mathbf{x}) - \log(\mathbf{x_0})\| < \delta$ olduğunda

$$|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x_0})| < \frac{\varepsilon}{2M_0(\varphi)}$$

olur. Ayrıca $(\varphi.5_1)$ şartından $\mathbf{w} > \mathbf{0}$ için

$$
\begin{aligned}
&\left|\left(E^{\varphi}_{\mathbf{w},j} f\right)(\mathbf{x_0}) - f(\mathbf{x_0})\right| \\
\leq &\left(\sum_{\left\| \frac{\mathbf{k}}{\mathbf{w}} - \log(\mathbf{x_0}) \right\| \leq \frac{\delta}{2}} + \sum_{\left\| \frac{\mathbf{k}}{\mathbf{w}} - \log(\mathbf{x_0}) \right\| > \frac{\delta}{2}} \right) \left(w_j \int_{k_j/w_j}^{(k_j+1)/w_j} \left| f\left(e^{\mathbf{k}'_j/\mathbf{w}'_j}, e^u\right) - f(\mathbf{x_0}) \right| du \right) \left|\varphi\left(e^{-\mathbf{k}} \mathbf{x_0^w}\right)\right| \\
:= &I_1 + I_2
\end{aligned}
$$

yazılabilir. Şimdi her $\mathbf{w} > \overline{\mathbf{w}}$ için $\dfrac{1}{\underline{w}} < \frac{\delta}{2}$ olacak şekilde bir $\overline{\mathbf{w}}$ sabitleyelim. $u \in \left[\frac{k_j}{w_j}, \frac{k_j+1}{w_j}\right]$ ve $\mathbf{w} > \overline{\mathbf{w}}$ için $\left\| \frac{\mathbf{k}}{\mathbf{w}} - \log(\mathbf{x_0}) \right\| < \frac{\delta}{2}$ iken

$$
\left\| \left(\frac{\mathbf{k}'_j}{\mathbf{w}'_j}, u \right) - \log(\mathbf{x_0}) \right\| \leq \left\| \left(\frac{\mathbf{k}'_j}{\mathbf{w}'_j}, u \right) - \frac{\mathbf{k}}{\mathbf{w}} \right\| + \left\| \frac{\mathbf{k}}{\mathbf{w}} - \log(\mathbf{x_0}) \right\| \leq \delta
$$

olur. Buradan $I_1 < \frac{\varepsilon}{2}$ elde edilir. Diğer taraftan,

$$
\left\| \frac{\mathbf{k}}{\mathbf{w}} - \log(\mathbf{x_0}) \right\| \leq \frac{\|\mathbf{k} - \mathbf{w}\log(\mathbf{x_0})\|}{\underline{w}} \tag{5.2}
$$

eşitsizliği yazılabilir ve yeterince büyük $\underline{w} > 0$ için $(\varphi.5_3)$'den yararlanılırsa

$$
\sum_{\|\mathbf{k} - \mathbf{w}\log(\mathbf{x_0})\| > \frac{w\delta}{2}} \left|\varphi\left(e^{-\mathbf{k}} \mathbf{x_0^w}\right)\right| < \frac{\varepsilon}{4\|f\|_\infty} \tag{5.3}
$$

elde edilir. Sonuç olarak (5.2) ve (5.3)'den

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \sum_{\left\| \frac{\mathbf{k}}{\mathbf{w}} - \log(\mathbf{x_0}) \right\| > \frac{\delta}{2}} \left|\varphi\left(e^{-\mathbf{k}} \mathbf{x_0^w}\right)\right| w_j \int_{k_j/w_j}^{(k_j+1)/w_j} \left| f\left(e^{\mathbf{k}'_j/\mathbf{w}_j{}'}, e^u\right) - f(\mathbf{x_0}) \right| du \\
&\leq 2\|f\|_\infty \sum_{\|\mathbf{k} - \mathbf{w}\log(\mathbf{x_0})\| > \frac{w\delta}{2}} \left|\varphi\left(e^{-\mathbf{k}} \mathbf{x_0^w}\right)\right| \\
&< \frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}
$$

elde edilir ve ispat tamamlanır. □

Özel olarak, ele alınan fonksiyon log-düzgün sürekli ve sınırlı fonksiyonlar uzayına ait ise aşağıdaki düzgün yakınsaklık sonucunu verebiliriz.

Teorem 5.2 (Turgay ve ark., 2020) $f \in \mathcal{C}\left(\mathbb{R}^n_+\right)$ *ve* $\varphi \in \Phi'$ *ise*

$$
\lim_{\mathbf{w} \to +\infty} \left\| E^{\varphi}_{\mathbf{w},j} f - f \right\|_\infty = 0
$$

dir.

İspat Teorem 5.1'in ispatı göz önüne alınarak benzer adımlar takip edilirken f fonksiyonu üzerinde log-düzgün süreklilik tanımı kullanılırsa sonuç elde edilir. $\square$

5.1.2. Çok Değişkenli Exponansiyel Sampling Kantorovich Serilerinin Yakınsaklık Hızları

Bu bölümde $(E^{\varphi}_{\mathbf{w},j})$ ailesinin yakınsaklık hızı incelenecektir. Bunu yapabilmek için daha önce tanımlanan (4.15) süreklilik modülünden farklı olarak logaritmik süreklilik modülünü çok değişkenli fonksiyonlar uzayı için tanımlayalım. $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n_+)$ fonksiyonları için $\delta > 0$ olmak üzere logaritmik süreklilik modülü

$$\omega\left(f,\delta\right) := \sup\left\{\left|f\left(\mathbf{x}\right) - f\left(\mathbf{y}\right)\right| : \mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n_+, \quad \left\|\log\left(\mathbf{x}\right) - \log\left(\mathbf{y}\right)\right\| \leq \delta\right\} \tag{5.4}$$

olarak tanımlanır (Kursun ve ark., 2021).

Not 5.4 $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n_+)$ *fonksiyonları için logaritmik süreklilik modülü aşağıdaki özellikleri sağlar:*

$i.$ *Her* $\delta > 0$ *sayısı için* $\omega\left(f,\delta\right)$ *sonludur,*

$ii.$ $\delta_1 \leq \delta_2$ *ise* $\omega(f,\delta_1) \leq \omega(f,\delta_2)$*'dir,*

$iii.$ $\delta_1,\delta_2 > 0$ *sayıları için* $\omega(f,\delta_1+\delta_2) \leq \omega(f,\delta_1) + \omega(f,\delta_2)$ *sağlanır,*

$iv.$ $m \in \mathbb{N}$ *için* $\omega\left(f,m\delta\right) \leq m\omega\left(f,\delta\right)$*,*

$v.$ *Herhangi bir* $\lambda > 0$ *sayısı için* $\omega\left(f,\lambda\delta\right) \leq \left(1+\lambda\right)\omega\left(f,\delta\right)$ *yazılabilir,*

$vi.$ $|f(\mathbf{t}) - f(\mathbf{x})| \leq \omega(f, ||\log(\mathbf{t}) - \log(\mathbf{x})||)$*'dir,*

$vii.$ $\left|f\left(\mathbf{x}\right) - f\left(\mathbf{y}\right)\right| \leq \left(1 + \frac{\|\log(\mathbf{x})-\log(\mathbf{y})\|}{\delta}\right)\omega\left(f,\delta\right),$

$viii.$ $\lim\limits_{\delta\to 0}\omega\left(f,\delta\right) = 0.$

İspat

$i)$ f sınırlı olduğundan supremumu mevcut ve sonludur.

$ii)$ $0<\delta_1<\delta_2$ için

$A:=\{\mathbf{t},\mathbf{x}\in\mathbb{R}_+^n : \|\log(\mathbf{t})-\log(\mathbf{x})\|\leq\delta_2\}$ ve $B:=\{\mathbf{t},\mathbf{x}\in\mathbb{R}_+^n : \|\log(\mathbf{t})-\log(\mathbf{x})\|\leq\delta_1\}$

olarak alınırsa, $A\subseteq B$ olduğu açıkça görülür. Supremum tanımı kullanılırsa istenilen sonuç elde edilir.

$iii)$ $||\log(\mathbf{x_1})-\log(\mathbf{x_2})||\leq\delta_1+\delta_2$, $||\log(\mathbf{x})-\log(\mathbf{x_1})||=\delta_1$ ve $\mathbf{x_1}\leq\mathbf{x}\leq\mathbf{x_2}$ ise

$$\begin{aligned}|f(\mathbf{x_1})-f(\mathbf{x_2})| &\leq |f(\mathbf{x})-f(\mathbf{x_1})|+|f(\mathbf{x_2})-f(\mathbf{x})|\\ &\leq \omega(f,||\mathbf{x}-\mathbf{x_1}||)+\omega(f,||\mathbf{x_2}-\mathbf{x}||)\end{aligned}$$

yazılabilir. $||\mathbf{x_2}-\mathbf{x}||\leq\delta_2$ olduğundan

$$|f(\mathbf{x_1})-f(\mathbf{x_2})|\leq\omega(f,\delta_1)+\omega(f,\delta_2)$$

elde edilmiş olur.

$iv)$

$$\omega\left(f,m\delta\right)=\sup_{\substack{\mathbf{t},\mathbf{x}\in\mathbb{R}_+^n\\ \|\mathbf{t}-\mathbf{x}\|<m\delta}}|f(\mathbf{t})-f(\mathbf{x})|$$

formülünde $\mathbf{t}=\mathbf{x}+m\mathbf{h}$ kabul edilirse

$$\begin{aligned}\omega(f,m\delta) &= \sup_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}_+^n}|f(\mathbf{x}+m\mathbf{h})-f(\mathbf{x})|\\ &= \sup_{\|\mathbf{h}\|<m\delta}\left|\sum_{k=0}^{m-1}[f(\mathbf{x}+(k+1)\mathbf{h})-f(\mathbf{x}+k\mathbf{h})]\right|\end{aligned}$$

yazılır ve

$$\omega(f,m\delta)\leq\sum_{k=0}^{m-1}\sup_{\substack{\mathbf{x}\in\mathbb{R}_+^n\\ \|\mathbf{h}\|<m\delta}}|f(\mathbf{x}+(k+1)\mathbf{h})-f(\mathbf{x}+k\mathbf{h})|$$

dir. (5.4) tanımından dolayı toplama bağlı ifade $\omega(f,\delta)$ dir ve toplananların sayısı m tane olduğundan

$$\omega(f,m\delta)\leq m\omega(f,\delta)$$

eşitsizliği elde edilir.

$v)$ λ sayısının tam kısmını m alalım, yani $\lfloor\lambda\rfloor=m$ olsun. O halde, $m\leq\lambda<m+1$ olup $m+1\leq\lambda+1<m+2$ yazılabilir. Buradan,

$$\begin{aligned}\omega(f,\lambda\delta) &< \omega(f,(m+1)\delta)\\ &\leq (m+1)\omega(f,\delta)\\ &\leq (\lambda+1)\omega(f,\delta)\end{aligned}$$

bulunur.

$vi)$ $\omega(f,\delta)$ tanımında $\delta = ||\log(\mathbf{t}) - \log(\mathbf{x})||$ seçilirse

$$\omega(f, ||\log(\mathbf{t}) - \log(\mathbf{x})||) = \sup_{\substack{||\log(\mathbf{t})-\log(\mathbf{x})|| \leq ||\log(\mathbf{t})-\log(\mathbf{x})|| \\ \mathbf{t},\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n_+}} |f(\mathbf{t}) - f(\mathbf{x})|$$

elde edilir. Supremum tanımı kullanılırsa ispat tamamlanmış olur.

$vii)$ (vi) özelliğinden $|f(\mathbf{t}) - f(\mathbf{x})| \leq \omega\left(f, \frac{||\log(\mathbf{t}) - \log(\mathbf{x})||}{\delta}\delta\right)$ yazılabilir. (v) özelliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} |f(\mathbf{t}) - f(\mathbf{x})| &\leq \omega\left(f, \frac{||\log(\mathbf{t}) - \log(\mathbf{x})||}{\delta}\delta\right) \\ &\leq \left(1 + \frac{\|\log(\mathbf{t}) - \log(\mathbf{x})\|}{\delta}\right)\omega(f,\delta) \end{aligned}$$

elde edilir.

$viii)$ f fonksiyonu $\mathbb{R}^n_+$'da log-düzgün sürekli bir fonksiyon olduğundan her $\varepsilon > 0$ için bir $\xi > 0$ vardır öyle ki $\|\log(\mathbf{t}) - \log(\mathbf{x})\| < \xi$ olduğunda $|f(\mathbf{t}) - f(\mathbf{x})| < \varepsilon$ olur. Bu durumda, (5.4) tanımından görüleceği gibi $\delta < \xi$ olduğunda

$$\omega(f,\delta) < \varepsilon$$

olur. Yani her $\varepsilon > 0$ verildiğinde $\xi > 0$ bulunur öyle ki $\delta < \xi$ olduğunda

$$\omega(f,\delta) < \varepsilon$$

olur. Bu da

$$\lim_{\delta\to 0}\omega(f,\delta) = 0$$

olduğunu kanıtlar.

□

Teorem 5.3 (Turgay ve ark., 2020) *φ çekirdek fonksiyonu*

$$M_1(\varphi) := \sup_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n_+}\sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^n}\left|\varphi\left(e^{-\mathbf{k}}\mathbf{x}^{\mathbf{w}}\right)\right| \|\mathbf{k} - \mathbf{w}\log(\mathbf{x})\| < +\infty \tag{5.5}$$

şartını sağlıyorsa ve $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n_+)$ ise her $j = 1, ..., n$ için

$$\left|\left(E^{\varphi}_{\mathbf{w},j}f\right)(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})\right| \leq \omega\left(f, \frac{1}{\underline{w}}\right)\left(\frac{3}{2}M_0(\varphi) + M_1(\varphi)\right)$$

sağlanır.

İspat (5.1) operatörlerinin tanımını kullanarak

$$
\begin{aligned}
&\left|\left(E^{\varphi}_{\mathbf{w},j}f\right)(\mathbf{x})-f(\mathbf{x})\right| \\
&\leq \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^n}\left|\varphi\left(e^{-\mathbf{k}}\mathbf{x}^{\mathbf{w}}\right)\right| w_j \int\limits_{k_j/w_j}^{(k_j+1)/w_j} \left|f\left(e^{\mathbf{k}'_j/\mathbf{w}'_j}, e^{u}\right)-f(\mathbf{x})\right| du \\
&\leq \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^n}\left|\varphi\left(e^{-\mathbf{k}}\mathbf{x}^{\mathbf{w}}\right)\right| w_j \int\limits_{k_j/w_j}^{(k_j+1)/w_j} \omega\left(f,\left\|\left(\frac{\mathbf{k}'_j}{\mathbf{w}'_j},u\right)-\log(\mathbf{x})\right\|\right) du \\
&\leq \omega\left(f,\frac{1}{\underline{w}}\right)\sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^n}\left|\varphi\left(e^{-\mathbf{k}}\mathbf{x}^{\mathbf{w}}\right)\right| w_j \int\limits_{k_j/w_j}^{(k_j+1)/w_j} \left(1+\underline{w}\left\|\left(\frac{\mathbf{k}'_j}{\mathbf{w}'_j},u\right)-\log(\mathbf{x})\right\|\right) du \\
&\leq \omega\left(f,\frac{1}{\underline{w}}\right)\sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^n}\left|\varphi\left(e^{-\mathbf{k}}\mathbf{x}^{\mathbf{w}}\right)\right| \left\{1+\frac{\underline{w}}{2}\left\{\left\|\left(\frac{\mathbf{k}'_j}{\mathbf{w}'_j},\frac{k_j+1}{w_j}\right)-\log(\mathbf{x})\right\|+\left\|\frac{\mathbf{k}}{\mathbf{w}}-\log(\mathbf{x})\right\|\right\}\right\}
\end{aligned}
$$

yazabiliriz. Diğer taraftan, $(\varphi.5_2)$ şartı (5.5) hipotezi ve $\underline{w}\leq w_j, \underline{w}\leq\|\mathbf{w}\|$ eşitsizlikleri kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
&\left|\left(E^{\varphi}_{\mathbf{w},j}f\right)(\mathbf{x})-f(\mathbf{x})\right| \\
&\leq \omega\left(f,\frac{1}{\underline{w}}\right)\left\{M_0(\varphi)+\frac{\underline{w}}{2}\left(\frac{1}{w_j}M_0(\varphi)+\frac{2}{\|\mathbf{w}\|}M_1(\varphi)\right)\right\} \\
&\leq \omega\left(f,\frac{1}{\underline{w}}\right)\left\{\frac{3}{2}M_0(\varphi)+M_1(\varphi)\right\}
\end{aligned}
$$

elde edilir ve ispat tamamlanmış olur. □

Ek olarak, göz önüne alınan fonksiyon “log-Holderian” olduğunda düzgün norm yakınsaklık hızını da hesaplayabiliriz. Ayrıca, (5.5) koşulunu sağlamamasına rağmen $\alpha\in(0,1)$ aralığında olmak üzere $M_\alpha(\varphi)<+\infty$ şartını sağlayan çekirdek örnekleri mevcuttur. Bunun gibi durumları da göz önüne alabilmek için log-Holderian sınıfına ait f fonksiyonlar için benzer bir eşitsizliği elde etmek önemlidir.

Tanım 5.2 *Çok değişkenli f fonksiyonu için $0<\alpha\leq 1$ olmak üzere*

$$
|f(\mathbf{x})-f(\mathbf{y})|\leq C\,\|\log(\mathbf{x})-\log(\mathbf{y})\|^{\alpha}, \qquad (\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{R}^n_+)
$$

olacak şekilde bir $C>0$ sabiti bulunabiliyorsa f fonksiyonuna α-nıncı dereceden log-*Holderian denir.*

Teorem 5.4 (Turgay ve ark., 2020) $0<\alpha\leq 1$ *olmak üzere f fonksiyonu α-ıncı dereceden* log-*Holderian ise*

$$
\mathbf{w}\to+\infty \ \ iken \ \ \left\|E^{\varphi}_{\mathbf{w},j}f-f\right\|_{\infty}\leq\frac{\tilde{C}}{\underline{w}^{-\alpha}}
$$

olur.

İspat Hipotez ve (5.1) operatör ailelerinin tanımı kullanılırsa, $\underline{w} = \min\{w_1, w_2, ..., w_n\}$ ve $\tilde{C} = C\left\{\sum\limits_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^n} |\varphi(e^{-\mathbf{k}}\mathbf{x}^{\mathbf{w}})| \, \|\mathbf{k} - \log(\mathbf{x})\|^{\alpha} + M_0(\varphi)\right\}$ olmak üzere

$$
\begin{aligned}
&\left|\left(E^{\varphi}_{\mathbf{w},j} f\right)(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})\right| \\
&\leq \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^n} \left|\varphi\left(e^{-\mathbf{k}}\mathbf{x}^{\mathbf{w}}\right)\right| w_j \int\limits_{k_j/w_j}^{(k_j+1)/w_j} \left| f\left(e^{\mathbf{k}'_j/\mathbf{w}'_j}, e^{u}\right) - f(\mathbf{x}) \right| du \\
&\leq C \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^n} \left|\varphi\left(e^{-\mathbf{k}}\mathbf{x}^{\mathbf{w}}\right)\right| w_j \int\limits_{k_j/w_j}^{(k_j+1)/w_j} \left\| \log\left(e^{\mathbf{k}'_j/\mathbf{w}'_j}, e^{u}\right) - \log(\mathbf{x}) \right\|^{\alpha} du \\
&\leq C \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^n} \left|\varphi\left(e^{-\mathbf{k}}\mathbf{x}^{\mathbf{w}}\right)\right| \left\| \left(\frac{\mathbf{k}'_j}{\mathbf{w}'_j}, \frac{k_j+1}{w_j}\right) - \log(\mathbf{x}) \right\|^{\alpha} \\
&\leq C \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^n} \left|\varphi\left(e^{-\mathbf{k}}\mathbf{x}^{\mathbf{w}}\right)\right| \left\{ \left\| \frac{\mathbf{k}}{\mathbf{w}} - \log(\mathbf{x}) \right\|^{\alpha} + \left\| \left(\frac{\mathbf{k}'_j}{\mathbf{w}'_j}, \frac{k_j+1}{w_j}\right) - \frac{\mathbf{k}}{\mathbf{w}} \right\|^{\alpha} \right\} \\
&\leq C \left\{ \frac{\sum\limits_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^n} |\varphi(e^{-\mathbf{k}}\mathbf{x}^{\mathbf{w}})| \, \|\mathbf{k} - \mathbf{w}\log(\mathbf{x})\|^{\alpha}}{\|\mathbf{w}\|^{\alpha}} + \frac{1}{w_j^{\alpha}} M_0(\varphi) \right\} \\
&\leq \frac{\tilde{C}}{\underline{w}^{\alpha}}
\end{aligned}
$$

elde edilir ve ispat tamamlanmış olur. □

5.1.3. $\left(E^{\varphi}_{\mathbf{w},j}\right)$ Ailesi için Mellin Anlamında Voronovskaya Tipli Teorem

Bu bölüme ilk olarak $f : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{C}$ fonksiyonunun Mellin anlamında kısmi türev notasyonlarını tanıtarak başlayalım. $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ noktasında f fonksiyonunun $i = 1, 2, ..., n$ için x_i değişkenine göre kısmi türevi

$$\Theta_{x_i} f(\mathbf{x}) := x_i \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i}$$

ile verilir. Bir $\mathbf{k} = (k_1, k_2, ..., k_n) \in \mathbb{N}^n_0$ sayısı için $\mathbf{x}$ noktasında $r = k_1 + k_2 + ... + k_n$-ninci dereceden kısmi Mellin türevi

$$\Theta^{r}_{x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_n^{k_n}} f(\mathbf{x}) := \Theta^{k_1}_{x_1}\left(\Theta^{k_2}_{x_2} \ldots \left(\Theta^{k_n}_{x_n} f\right)\right)(\mathbf{x}) \tag{5.6}$$

olarak tanımlanır.

$$\Theta_{x_i}^{1} f(\mathbf{x}) := \Theta_{x_i} f(\mathbf{x}), \; \Theta_{x_i}^{0} f(\mathbf{x}) := f(\mathbf{x})$$

olarak alınacaktır.

$\mathbf{h} = (h_1, h_2, ..., h_n) \in \mathbb{N}_0^n$ ve $v = |\mathbf{h}|$ olsun. $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n$ için $\varphi \in \Phi'$'nin $\mathbf{h}$-ninci dereceden momentini

$$\begin{aligned} m_{\mathbf{h}}^{v}(\varphi, \mathbf{x}) &:= \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n} \varphi\left(e^{-\mathbf{k}}\mathbf{x}\right) \log^{\mathbf{h}}\left(e^{\mathbf{k}}\mathbf{x}^{-1}\right) = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n} \varphi\left(e^{-\mathbf{k}}\mathbf{x}\right) (\mathbf{k} - \log(\mathbf{x}))^{\mathbf{h}} \\ &= \sum_{(k_1, k_2, ..., k_n) \in \mathbb{Z}^n} \varphi\left(e^{-k_1}x_1, ..., e^{-k_n}x_n\right) (k_1 - \log(x_1))^{h_1} ... (k_n - \log(x_n))^{h_n} \end{aligned}$$

olarak tanımlayalım. $\varphi \in \Phi'$'nin j-ninci dereceden mutlak momentini

$$M_j(\varphi) := \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n} \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n} \left|\varphi\left(e^{-\mathbf{k}}\mathbf{x}\right)\right| \|\mathbf{k} - \log(\mathbf{x})\|^{j}, \; j > 0$$

olarak tanımlayalım. Voronovskaya tipli teoremde ihtiyacımız olacak çok değişkenli fonksiyonlar için verilmiş Mellin-Taylor formülünü hatırlatalım.

Önerme 5.1 (Kursun ve ark., 2021) *$m \in \mathbb{N}$ ve $f : \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{C}$ fonksiyonu $C^{(m)}\left(\mathbb{R}_+^n\right)$ uzayına ait olsun. O halde $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}_+^n$ ve $\mathbf{t} = (t_1, t_2, ..., t_n) \in \mathbb{R}_+^n$ için $(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$ $(x_1, x_2, ..., x_n)$, $(t_1x_1, t_2x_2, ..., t_nx_n)$ uç noktalı $L_{t_1, t_2, ..., t_n}$ doğru parçası üzerinde uygun bir nokta olmak üzere*

$$R_m(\mathbf{t}) = \frac{1}{m!} \left(\Theta_{x_1} \log(t_1) + \Theta_{x_2} \log(t_2) + ... + \Theta_{x_n} \log(t_n)\right)^m f(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$$

Lagrange kalan terimi ile

$$f(\mathbf{tx}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{r=1}^{m-1} \frac{1}{r!} \left(\Theta_{x_1} \log(t_1) + \Theta_{x_2} \log(t_2) + ... + \Theta_{x_n} \log(t_n)\right)^r f(\mathbf{x}) + R_m(\mathbf{t})$$

olarak yazılır.

İspat İspat $m = 2$ durumu için verilecektir. Genel durum (5.6) kullanılarak elde edilebilir. $z \in [1, e]$ olmak üzere

$$F(z) = f\left(t_1^{\log(z)}x_1, t_2^{\log(z)}x_2, ..., t_n^{\log(z)}x_n\right)$$

fonksiyonunu alalım. Tek değişkenli Mellin-Taylor formülü uygulanırsa, $\tilde{z} \in (1, e)$ olmak üzere

$$F(z) = F(1) + \Theta F(1) \log(z) + \frac{\Theta^2 F(\tilde{z})}{2} \log(z)$$

elde edilir. Buradan

$$\Theta F\left(z\right)=\frac{\partial f}{\partial x_1}\left(t_1^{\log(z)}x_1,...,t_n^{\log(z)}x_n\right)x_1t_1^{\log(z)}\log(t_1)+...+\frac{\partial f}{\partial x_n}\left(t_1^{\log(z)}x_1,...,t_n^{\log(z)}x_n\right)x_nt_n^{\log(z)}\log(t_n)$$

ve $z=1$ için

$$\begin{aligned}\Theta F\left(1\right)&=\Theta_{x_1}f\left(\mathbf{x}\right)\log(t_1)+...+\Theta_{x_n}f\left(\mathbf{x}\right)\log(t_n)\\&=\left(\Theta_{x_1}\log(t_1)+...+\Theta_{x_n}\log(t_n)\right)f\left(\mathbf{x}\right)\end{aligned}$$

yazılır. Benzer şekilde $\Theta^2F\left(z\right)=zF'\left(z\right)+z^2F''\left(z\right)$ için

$$\begin{aligned}\Theta^2F\left(z\right)=&\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}\left(t_1^{\log(z)}x_1,...,t_n^{\log(z)}x_n\right)x_i^2t_i^{2\log(z)}\log^2(t_i)\\&+\sum_{i,j=1,i\neq j}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}\left(t_1^{\log(z)}x_1,...,t_n^{\log(z)}x_n\right)x_ix_j\left(t_it_j\right)^{\log(z)}\log(t_i)\log(t_j)\\&+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}\left(t_1^{\log(z)}x_1,...,t_n^{\log(z)}x_n\right)x_it_i^{\log(z)}\log^2(t_i)\end{aligned}$$

yazılır ve $z=\tilde{z}$ için $(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n)=\left(t_1^{\log(\tilde{z})}x_1,...,t_n^{\log(\tilde{z})}x_n\right)\in L_{t_1,...,t_n}$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\frac{\Theta^2F\left(\tilde{z}\right)}{2}&=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}\left(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n\right)\xi_i^2+\frac{\partial f}{\partial x_i}\left(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n\right)\xi_i\right)\log^2(t_i)\\&+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1,i\neq j}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}\left(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n\right)\xi_i\xi_j\log(t_i)\log(t_j)\end{aligned}$$

elde edilir. Son olarak, kısmi Mellin türevinin tanımı kullanılırsa

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}\left(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n\right)\xi_i^2&=\left[\Theta_{x_i}^2f\left(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n\right)-\Theta_{x_i}f\left(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n\right)\right]\\\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}\left(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n\right)\xi_i\xi_j&=\left[\Theta_{x_i}\left(\Theta_{x_j}f\right)\left(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n\right)\right],(i\neq j\text{ için})\end{aligned}$$

elde edilir. O halde

$$\frac{\Theta^2F\left(\tilde{z}\right)}{2}=\frac{1}{2}\left(\Theta_{x_1}\log(t_1)+...+\Theta_{x_n}\log(t_n)\right)^2f\left(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n\right)$$

elde edilir ve ispat tamamlanmış olur. □

Önerme 5.1'den hareketle Peano kalan terimli Mellin-Taylor formülü de elde edilebilir.

Önerme 5.2 (Kursun ve ark., 2021) *Önerme 5.1'in hipotezleri altında,* $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, ..., \xi_n)$ *olmak üzere*

$$\lim_{\mathbf{t}\to\mathbf{1}} \frac{(\Theta_{x_1}\log(t_1) + ... + \Theta_{x_n}\log(t_n))^m f(\boldsymbol{\xi}) - (\Theta_{x_1}\log(t_1) + ... + \Theta_{x_n}\log(t_n))^m f(\mathbf{x})}{\left(\log^2(t_1) + ... + \log^2(t_n)\right)^{m/2}} = 0$$

dir.

İspat İspat $m = 2$ durumu için yapılacaktır. Genel durum benzer şekilde elde edilebilir.

$$I := \left|(\Theta_{x_1}\log(t_1) + ... + \Theta_{x_n}\log(t_n))^2 f(\xi) - (\Theta_{x_1}\log(t_1) + ... + \Theta_{x_n}\log(t_n))^2 f(\mathbf{x})\right|$$

olsun. Buradan

$$\begin{aligned} I \leq & \sum_{i=1}^{n} \left|\Theta_{x_i}^2 f(\xi) - \Theta_{x_i}^2 f(\mathbf{x})\right| \log^2(t_i) \\ & + \sum_{i,j=1, i\neq j}^{n-1} \left|\Theta_{x_i}\left(\Theta_{x_j} f\right)(\xi) - \Theta_{x_i}\left(\Theta_{x_j} f\right)(\mathbf{x})\right| \left|\log(t_i)\log(t_j)\right| \end{aligned}$$

olup, sonuç olarak

$$\begin{aligned} \frac{I}{\log^2(t_1) + ... + \log^2(t_n)} \leq & \sum_{i=1}^{n} \left|\Theta_{x_i}^2 f(\xi) - \Theta_{x_i}^2 f(\mathbf{x})\right| \\ & + \sum_{i=1, i\neq j}^{n-1} \left|\Theta_{x_i}\left(\Theta_{x_j} f\right)(\xi) - \Theta_{x_i}\left(\Theta_{x_j} f\right)(\mathbf{x})\right| \end{aligned}$$

yazabiliriz. $\xi \in L_{t_1, t_2, ..., t_n}$ olduğu dikkate alınırsa $f \in C^{(2)}\left(\mathbb{R}_+^n\right)$ kabulünden ispat tamamlanmış olur. □

Şimdi, Peano kalan terimli Mellin-Taylor formülünü verebiliriz. $H(t_1, t_2, ..., t_n)$

$$\lim_{(t_1, t_2, ..., t_n)\to(1,1,...,1)} H(t_1, t_2, ..., t_n) = 0$$

şartını sağlayan sınırlı bir fonksiyon olmak üzere

$$R_m(t_1, t_2, ..., t_n) = H(t_1, t_2, ..., t_n)\left(\log^2(t_1) + \log^2(t_2) + ... + \log^2(t_n)\right)^{m/2},$$

Peano kalan terimi ile

$$f(\mathbf{tx}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{r=1}^{m} \frac{1}{r!}(\Theta_{x_1}\log(t_1) + ... + \Theta_{x_n}\log(t_n))^r f(\mathbf{x}) + R_m(\mathbf{t})$$

olarak yazılır.

Not 5.5 $\mathbf{t}=(t_1,t_2,...,t_n)$, $\mathbf{x}=(x_1,x_2,...,x_n)$ *alınırsa*

$$R_m(\mathbf{t})=H(\mathbf{t})\left\|\log(\mathbf{tx})-\log(\mathbf{x})\right\|^m$$

yazılabilir.

$(E^{\varphi}_{\mathbf{w},j})$ operatör ailesi için Voronovskaya tipli teoremi verebilmek için φ çekirdek fonksiyonu üzerine yeni birkaç hipotez ekleyeceğiz: $l\in\mathbb{N}$ vardır öyleki $\mathbf{h}\in\mathbb{N}_0^n$, $|\mathbf{h}|\leq l$

$(\varphi.5_4)$ $m^{|\mathbf{h}|}_{\mathbf{h}}(\varphi,\mathbf{x}):=m^{|\mathbf{h}|}_{\mathbf{h}}(\varphi)$ $\mathbf{x}$'den bağımsız,

$(\varphi.5_5)$ $M_l(\varphi)<+\infty$ ve

$$\lim_{r\to+\infty}\sum_{\|\mathbf{k}-\log(\mathbf{x})\|>r}\left|\varphi\left(e^{-\mathbf{k}}\mathbf{x}\right)\right|\|\mathbf{k}-\log(\mathbf{x})\|^l=0,$$

$\mathbf{x}$'e göre düzgündür.

$(\varphi.5_1),(\varphi.5_4)$ ve $(\varphi.5_5)$ şartlarını sağlayan φ fonksiyonlarının kümesini Φ'_l ile gösterelim.

Teorem 5.5 (Turgay ve ark., 2020) $f:\mathbb{R}^n_+\to\mathbb{R}$ *fonksiyonu* $\mathbf{x}=(x_1,x_2,...,x_n)\in\mathbb{R}^n_+$ *noktasında lokal olarak* $f\in C^{(m)}\left(\mathbb{R}^n_+\right)$ *ve* $\varphi\in\Phi'_m$ *olsun. O halde,* $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n_+$, $j=1,2,...,n$ *için* $\mathbf{w}\to+\infty$ *durumunda*

$$\left(E^{\varphi}_{\mathbf{w},j}f\right)(\mathbf{x})-f(\mathbf{x})=\sum_{r=1}^{m}\sum_{|\mathbf{h}|=r}\frac{1}{\mathbf{h}!}\Theta^r_{x_1^{h_1}x_2^{h_2}...x_n^{h_n}}f(\mathbf{x})\left[\prod_{i=1}^{m}w_i^{-h_i}\right]\sum_{l=0}^{h_j}\binom{h_j}{l}\frac{m^{r-h_j+l}_{(h'_j,l)}(\varphi)}{(h_j-l+1)}+o\left(\underline{w}^{-m}\right)$$

olur.

İspat Operatörün lineerliği ve Mellin-Taylor formülü kullanılırsa

$$\begin{aligned}
&\left(E^{\varphi}_{\mathbf{w},j}f\right)(\mathbf{x})-f(\mathbf{x})\\
&=\sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^n}\varphi\left(e^{-\mathbf{k}}\mathbf{x}^{\mathbf{w}}\right)w_j\int_{k_j/w_j}^{(k_j+1)/w_j}\left\{\sum_{r=1}^{m}\frac{1}{r!}\left[\Theta_{x_1}\log\left(\frac{e^{k_1/w_1}}{x_1}\right)+...+\Theta_{x_j}\log\left(\frac{e^u}{x_j}\right)\right.\right.\\
&\left.\left.+...+\ \Theta_{x_n}\log\left(\frac{e^{k_n/w_n}}{x_n}\right)\right]^r f(\mathbf{x})+H\left(\frac{e^{\mathbf{k}'_j/\mathbf{w}'_j}}{\mathbf{x}'_j},\frac{e^u}{x_j}\right)\left\|\log\left(e^{\mathbf{k}'_j/\mathbf{w}'_j},e^u\right)-\log(\mathbf{x})\right\|^m\right\}du\\
&=\sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^n}\varphi\left(e^{-\mathbf{k}}\mathbf{x}^{\mathbf{w}}\right)w_j\int_{k_j/w_j}^{(k_j+1)/w_j}\sum_{r=1}^{m}\sum_{|\mathbf{h}|=r}\frac{1}{\mathbf{h}!}\Theta^{h_1}_{x_1}\left(...\left(\Theta^{h_n}_{x_n}f\right)\right)(\mathbf{x})\\
&\times\prod_{i=1,i\neq j}^{n}\left(\frac{k_i}{w_i}-\log(x_i)\right)^{h_i}(u-\log(x_j))^{h_j}du\\
&+\sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^n}\varphi\left(e^{-\mathbf{k}}\mathbf{x}^{\mathbf{w}}\right)w_j\int_{k_j/w_j}^{(k_j+1)/w_j}H\left(\frac{e^{\mathbf{k}'_j/\mathbf{w}'_j}}{\mathbf{x}'_j},\frac{e^u}{x_j}\right)\left\|\log\left(e^{\mathbf{k}'_j/\mathbf{w}'_j},e^u\right)-\log(\mathbf{x})\right\|^m du:=I_1+I_2
\end{aligned}$$

yazılır. $0 \le h_j \le m$ için

$$w_j \int\limits_{k_j/w_j}^{(k_j+1)/w_j} (u-\log(x_j))^{h_j}\,du = w_j \sum_{l=0}^{h_j} \binom{h_j}{l} \left(\frac{k_j}{w_j}-\log(x_j)\right)^l \int\limits_{k_j/w_j}^{(k_j+1)/w_j} \left(u-\frac{k_j}{w_j}\right)^{h_j-l} du$$
$$= \sum_{l=0}^{h_j} \binom{h_j}{l} \left(\frac{k_j}{w_j}-\log(x_j)\right)^l \frac{w_j^{-h_j+l}}{(h_j-l+1)}$$
$$= w^{-h_j} \sum_{l=0}^{h_j} \binom{h_j}{l} \frac{(k_j-w_j\log(x_j))^l}{(h_j-l+1)}$$

olur. Sonuç olarak I_1 için

$$I_1 = \sum_{r=1}^{m} \sum_{|\mathbf{h}|=r} \frac{1}{\mathbf{h}!} \Theta_{x_1}^{h_1}\left(\ldots\left(\Theta_{x_n}^{h_n} f\right)\right)(\mathbf{x}) \left[\prod_{i=1}^{n} w_i^{-h_i}\right] \sum_{l=0}^{h_j} \binom{h_j}{l} \frac{1}{(h_j-l+1)}$$
$$\times \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^n} \left\{ (k_j-w_j\log(x_j))^l \prod_{i=1, i\neq j}^{n} (k_i-w_i\log(x_i))^{h_i} \right\} \varphi\left(e^{-\mathbf{k}}\mathbf{x}^{\mathbf{w}}\right)$$

olur ki

$$I_1 = \sum_{r=1}^{m} \sum_{|\mathbf{h}|=r} \frac{1}{\mathbf{h}!} \Theta_{x_1}^{h_1}\left(\ldots\left(\Theta_{x_n}^{h_n} f\right)\right)(\mathbf{x}) \left[\prod_{i=1}^{n} w_i^{-h_i}\right] \sum_{l=0}^{h_j} \binom{h_j}{l} \frac{m_{(h'_j,l)}^{r-h_j+l}(\varphi)}{(h_j-l+1)}$$

elde edilir. I_2 kalan terimi için eşitsizlik elde edelim. $\lim_{\mathbf{t}\to\mathbf{1}} H(\mathbf{t}) = 0$ olduğundan $\varepsilon > 0$ için $\exists\delta > 0$ öyleki

$$\left\| \left(\frac{\mathbf{k}'_j}{\mathbf{w}'_j}, u\right) - \log(\mathbf{x}) \right\| \le \left\| \left(\frac{\mathbf{k}'_j}{\mathbf{w}'_j}, \frac{k_j+1}{w_j}\right) - \log(\mathbf{x}) \right\|$$
$$\le \left\| \frac{\mathbf{k}}{\mathbf{w}} - \log(\mathbf{x}) \right\| + \frac{1}{w_j}$$
$$\le \frac{1}{\underline{w}} + \frac{\|\mathbf{k}-\mathbf{w}\log(\mathbf{x})\|}{\underline{w}} \le \delta$$

$$I_2 := \left\{ \sum_{\|\mathbf{k}-\mathbf{w}\log(\mathbf{x})\| \le \frac{w\delta}{2}} + \sum_{\|\mathbf{k}-\mathbf{w}\log(\mathbf{x})\| > \frac{w\delta}{2}} \right\} \varphi\left(e^{-\mathbf{k}}\mathbf{x}^{\mathbf{w}}\right)$$
$$\times w_j \int\limits_{k_j/w_j}^{(k_j+1)/w_j} H\left(\frac{e^{\mathbf{k}'_j/\mathbf{w}'_j}}{\mathbf{x}'_j}, \frac{e^u}{x_j}\right) \left\| \log\left(e^{\mathbf{k}'_j/\mathbf{w}'_j}, e^u\right) - \log(\mathbf{x}) \right\|^m du$$
$$:= I_{2,1} + I_{2,2}$$

dir. Yeterince büyük $\underline{w}$'lar için

$$
\begin{aligned}
|I_{2,1}| &< \varepsilon \sum_{\|\mathbf{k}-\mathbf{w}\log(\mathbf{x})\| \leq \frac{\underline{w}\delta}{2}} \left|\varphi\left(e^{-\mathbf{k}}\mathbf{x}^{\mathbf{w}}\right)\right| w_j \int_{k_j/w_j}^{(k_j+1)/w_j} \left\| \left(\frac{\mathbf{k}'_j}{\mathbf{w}'_j}, u \right) - \log(\mathbf{x}) \right\|^m du \\
&\leq \varepsilon 2^{m-1} \sum_{\|\mathbf{k}-\mathbf{w}\log(\mathbf{x})\| \leq \frac{\underline{w}\delta}{2}} \left|\varphi\left(e^{-\mathbf{k}}\mathbf{x}^{\mathbf{w}}\right)\right| \left\{ w_j \int_{k_j/w_j}^{(k_j+1)/w_j} \left\| \left(\frac{\mathbf{k}'_j}{\mathbf{w}'_j}, u \right) - \frac{\mathbf{k}}{\mathbf{w}} \right\|^m du + \left\| \frac{\mathbf{k}}{\mathbf{w}} - \log(\mathbf{x}) \right\|^m \right\} \\
&\leq \varepsilon 2^{m-2} \left[\frac{1}{\underline{w}^m} M_0(\varphi) + \frac{1}{\underline{w}^m} M_m(\varphi) \right] < +\infty
\end{aligned}
$$

olur. Son olarak, $(\varphi.5_5)$ şartı kullanılırsa

$$|I_{2,2}| \leq \|H\|_\infty 2^{m-2} \underline{w}^{-m} \varepsilon^*$$

elde edilir ve ispat tamamlanmış olur. □

5.2. Genelleştirilmiş Çok Değişkenli Exponansiyel Sampling Kantorovich Serileri

Şimdi Bölüm 5.1'de elde ettiğimiz sonuçları f fonksiyonunun eşit uzunluklu aralıklar üzerinde integrallenebilmesi yerine keyfi uzunluklu aralıklar üzerinde integrallenebilmesi durumu için yeniden inşa edeceğiz. Başlamadan önce, bir önceki bölümde verilmiş notasyonlara ek birkaç notasyon verelim.

$(t_{\mathbf{k}})_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^n}$ dizisi $t_{\mathbf{k}} = (t_{k_1}, t_{k_2}, ..., t_{k_n})$ olarak verilsin öyle ki her $(t_{k_i})_{k_i\in\mathbb{Z}}$, $i = 1, 2, ..., n$ dizisi monoton artan reel sayı dizisi, her $i = 1, 2, ..., n$ sayıları için $\lim_{k_i\to\pm\infty} t_{k_i} = \pm\infty$ ve öyle $\Delta, \delta > 0$ sayıları olsun ki $\delta \leq \Delta_{k_i} = t_{k_i+1} - t_{k_i} \leq \Delta$ sağlansın.

$\varphi : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonu

$(\varphi.6_1)$ Her $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_+$ için

$$\sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^n} \varphi\left(e^{-t_{\mathbf{k}}}\mathbf{x}\right) = \sum_{\left(t_{k_1}, t_{k_2}, ..., t_{k_n}\right)\in\mathbb{Z}^n} \varphi\left(e^{-t_{k_1}}x_1, e^{-t_{k_2}}x_2, ..., e^{-t_{k_n}}x_n\right) = 1$$

$(\varphi.6_2)$

$$M_0(\varphi) := \sup_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n_+} \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^n} \left|\varphi\left(e^{-t_{\mathbf{k}}}\mathbf{x}\right)\right| < +\infty$$

$(\varphi.6_3)$

$$\lim_{r\to+\infty} \sum_{\|t_{\mathbf{k}}-\log(\mathbf{x})\|\geq r} \left|\varphi\left(e^{-t_{\mathbf{k}}}\mathbf{x}\right)\right| = 0, \ \mathbf{x}\text{'e göre düzgün}$$

şartlarını sağlasın ve bu şartları sağlayan φ çekirdek fonksiyonlarının sınıfını Φ'' ile gösterelim. $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_+, \mathbf{w} > 0$ ve $\varphi \in \Phi''$ için çok değişkenli genelleştirilmiş exponansiyel Kantorovich serilerini (ÇDGESKS) , $f : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ fonksiyonu seriyi mutlak yakınsak kılan $\left[\frac{t_{k_j}}{w_j}, \frac{t_{k_j+1}}{w_j}\right]$ aralığında lokal integrallenebilir bir fonksiyon olmak üzere

$$\left(\mathsf{E}^{\varphi}_{\mathbf{w},j} f\right)(\mathbf{x}) := \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^n} \varphi\left(e^{-t_{\mathbf{k}}}\mathbf{x}^{\mathbf{w}}\right)\left[\frac{w_j}{\Delta_{k_j}} \int\limits_{t_{k_j}/w_j}^{(t_{k_j+1})/w_j} f\left(e^{t'_{k_j}/w'_j}, e^u\right) du\right] \tag{5.7}$$

olarak tanımlayacağız.

Not 5.6 (5.7) *operatörü, örneğin f sınırlı fonksiyonları için, iyi tanımlıdır. Gerçekten de her* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_+$, *için* $|f(\mathbf{x})| \leq L$ *ise* $(\varphi.6_2)$ *kullanılırsa,*

$$\begin{aligned}
|\left(\mathsf{E}^{\varphi}_{\mathbf{w},j} f\right)(\mathbf{x})| &\leq \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^n} \left|\varphi\left(e^{-t_{\mathbf{k}}}\mathbf{x}^{\mathbf{w}}\right)\right| w_j \int\limits_{t_{k_j}/w_j}^{\left(t_{k_j}+1\right)/w_j} \left|f\left(e^{t_{k_j}'/w'_j}, e^u\right)\right| du \\
&\leq L. \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} |\varphi\left(e^{-t_{\mathbf{k}}}\mathbf{x}^{\mathbf{w}}\right)| \\
&< +\infty
\end{aligned}$$

olduğu görülür.

Not 5.7 (5.7) *serilerinin tanımı kullanılırsa, her* $x \in \mathbb{R}^n_+$ *için* $\widetilde{\mathbf{1}}(\mathbf{x}) := 1$ *olarak tanımlanan sabit fonksiyon alındığında* $(\mathsf{E}^{\varphi}_{\mathbf{w},j}\widetilde{\mathbf{1}})(\mathbf{x}) = 1$ *olduğu görülür. Gerçekten de,* $(\varphi.6_1)$ *şartından*

$$\begin{aligned}
(E^{\varphi}_{\mathbf{w},j}\widetilde{\mathbf{1}})(\mathbf{x}) &= \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^n} \varphi\left(e^{-\mathbf{k}}\mathbf{x}^{\mathbf{w}}\right) w_j \int\limits_{t_{k_j}/w_j}^{\left(t_{k_j+1}\right)/w_j} du \\
&= \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^n} \varphi\left(e^{-\mathbf{k}}\mathbf{x}^{\mathbf{w}}\right) \\
&= 1
\end{aligned}$$

elde edilir.

5.2.1. Çok Değişkenli Genelleştirilmiş Exponansiyel Sampling Kantorovich Serilerinin Yakınsaklığı

Bu bölümde $(\mathsf{E}^{\varphi}_{\mathbf{w},j})$, ÇDGESKS'nin $\mathbf{w} > \mathbf{0}$ ve $j = 1, ..., n$ için yakınsaklık özellikleri verilecektir. Burada verilen teoremler bir önceki bölümde verilenleri analogları olup, $\left[\frac{k_j}{w_j}, \frac{k_j+1}{w_j}\right]$ yerine $\left[\frac{t_{k_j}}{w_j}, \frac{t_{k_j+1}}{w_j}\right]$ alındığı dikkate alınacak, ispatları verilmeyecektir.

Teorem 5.6 *$f : \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}$ sınırlı ise, f'nin her bir $\mathbf{x_0} \in \mathbb{R}_+^n$ süreklilik noktasında her $j = 1, ..., n$ için*

$$\lim_{\mathbf{w}\to+\infty} \left(\mathsf{E}_{\mathbf{w},j}^{\varphi} f\right)(\mathbf{x_0}) = f(\mathbf{x_0})$$

sağlanır.

Özel olarak, ele alınan fonksiyon log-düzgün sürekli ve sınırlı fonksiyonlar uzayına ait ise aşağıdaki düzgün yakınsaklık sonucunu verebiliriz.

Teorem 5.7 *$f \in \mathcal{C}\left(\mathbb{R}_+^n\right)$ ve $\varphi \in \Phi''$ ise*

$$\lim_{\mathbf{w}\to+\infty} \left\|\mathsf{E}_{\mathbf{w},j}^{\varphi} f - f\right\|_{\infty} = 0$$

dir.

5.2.2. Çok Değişkenli Genelleştirilmiş Exponansiyel Sampling Kantorovich Serilerinin Yakınsaklık Hızları

Bir önceki bölümde tanıtılan çok değişkenli fonksiyonlar uzayındaki log-süreklilik modulünden yararlanarak yakınsaklık hızı teoremini verelim.

Teorem 5.8 *$\varphi \in \Phi''$ çekirdek fonksiyonu*

$$M_1(\varphi) := \sup_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}_+^n} \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^n} \left|\varphi\left(e^{-t_{\mathbf{k}}}\mathbf{x}^{\mathbf{w}}\right)\right| \left\|t_{\mathbf{k}} - \mathbf{w}\log(\mathbf{x})\right\| < +\infty \tag{5.8}$$

şartını sağlıyorsa ve $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+^n)$ ise her $j = 1, ..., n$ için

$$\left|\left(\mathsf{E}_{\mathbf{w},j}^{\varphi} f\right)(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})\right| \leq \omega\left(f, \frac{1}{\underline{w}}\right)\left(\frac{3}{2}M_0(\varphi) + M_1(\varphi)\right)$$

sağlanır.

Ek olarak, göz önüne alınan fonksiyon "log-Holderian" olduğunda düzgün norm yakınsaklık hızını da hesaplayabiliriz.

Teorem 5.9 $0 < \alpha \leq 1$ *olmak üzere* f *fonksiyonu* α*-nıncı dereceden* log-*Holderian ise*

$$\underline{w} \to +\infty \text{ iken } \left\| \left(\mathsf{E}_{\mathbf{w},j}^{\varphi} f \right)(\cdot) - f(\cdot) \right\|_{\infty} \leq \frac{\tilde{C}}{\underline{w}^{-\alpha}}$$

olur.

5.2.3. $\left(\mathsf{E}_{\mathbf{w},j}^{\varphi}\right)$ Ailesi için Mellin Anlamında Voronovskaya Teoremi

$\left(\mathsf{E}_{\mathbf{w},j}^{\varphi}\right)$ operatör ailelerinin Voronovskaya tipli teoremini verebilmek için φ çekirdek fonksiyonu üzerine yeni birkaç hipotez ekleyeceğiz: $l \in \mathbb{N}$ vardır öyleki $\mathbf{h} \in \mathbb{N}_0^n$, $|\mathbf{h}| \leq l$

$(\varphi.6_4)$ $m_{\mathbf{h}}^{|\mathbf{h}|}(\varphi, \mathbf{x}) := m_{\mathbf{h}}^{|\mathbf{h}|}(\varphi)$ $\mathbf{x}$'den bağımsız,

$(\varphi.6_5)$ $M_l(\varphi) < +\infty$ ve

$$\lim_{r \to +\infty} \sum_{\|t_{\mathbf{k}} - \log(\mathbf{x})\| > r} \left| \varphi\left(e^{-t_{\mathbf{k}}} \mathbf{x}\right) \right| \|t_{\mathbf{k}} - \log(\mathbf{x})\|^l = 0,$$

$\mathbf{x}$'e göre düzgündür.

$(\varphi.6_1), (\varphi.6_4)$ ve $(\varphi.6_5)$ şartlarını sağlayan φ fonksiyonlarının kümesini Φ_l'' ile gösterelim.

Teorem 5.10 $f : \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}$ *fonksiyonu* $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}_+^n$ *noktasında lokal olarak* $f \in C^{(m)}\left(\mathbb{R}_+^n\right)$ *ve* $\varphi \in \Phi_m''$ *olsun. O halde,* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n$, $j = 1, 2, ..., n$ *için* $\underline{w} \to +\infty$ *durumunda*

$$\left(\mathsf{E}_{\mathbf{w},j}^{\varphi} f\right)(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}) = \sum_{r=1}^{m} \sum_{|\mathbf{h}|=r} \frac{1}{\mathbf{h}!} \Theta_{x_1^{h_1} x_2^{h_2} \ldots x_n^{h_n}}^{r} f(\mathbf{x}) \left[\prod_{i=1}^{m} w_i^{-h_i}\right] \sum_{l=0}^{h_j} \binom{h_j}{l} \frac{m_{(h_j', l)}^{r-h_j+l}(\varphi)}{(h_j - l + 1)} + o\left(\underline{w}^{-m}\right)$$

olur.

5.3. Çekirdek Uygulamaları

Bu bölümde ÇDESKS'nin bazı uygulamaları ele alınacaktır. Bunun için öncelikle operatörler ailelerinin tanımından önce verilmiş çekirdek şartlarını $((\varphi.5_1) - (\varphi.5_3))$ sağlayan çekirdekler tanıtılıp şartları karşıladıkları gösterilecektir. Daha sonra $E_{\mathbf{w},j}$ ailesinin kendisini oluşturan f fonksiyonuna yakınsaması grafikler ve tablolar yardımları ile gösterilecektir. Burada daha genel durum olarak tanıtılan (5.7) serileri yerine (5.1) serileri alınarak örnekleri basit tutup anlaşılabilirliği arttırmak amaçlanmıştır. Ayrıca ilk kısımda grafiksel gösterimleri kullanmak için

$n = 1$ alınarak $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}$'de çalışılmış, ardından farklı n değerleri alınarak uygulama örnekleri verilmiştir.

$c \in \mathbb{R}$ için

$$||f||_{X_c} = ||f(\cdot)(\cdot)^{c-1}||_1 = \int_0^{+\infty} |f(u)|u^{c-1}du$$

normu ile

$$X_c := \{f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C} : f(\cdot)(\cdot)^{c-1} \in L^1(\mathbb{R}^+)\}$$

uzayı tanımı verilmişti. $f \in X_c$ olmak üzere f fonksiyonunun Mellin dönüşümü

$$\mathcal{M}[f](s) = \int_0^{+\infty} f(u)u^{s-1}du,\ s = c + it, t \in \mathbb{R}$$

olarak verilir.

Teorem 5.11 (Mellin-Poisson Toplam Formülü, Butzer ve Jansche, 1998b) *χ çekirdek fonksiyonu, $k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere, Mellin-Poisson toplam formülü*

$$(i)^j \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \chi(e^{-k}x)(k - \log(u))^j = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{d^j}{dt^j}\mathcal{M}[\chi](2k\pi i)x^{-2k\pi i}$$

olarak verilir.

Mellin-Poisson toplam formülü kullanılırsa aşağıdaki şartların denk olduğu elde edilir:

1.

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \varphi(e^{-k}u) = 1$$

2.

$$\mathcal{M}[\varphi](2k\pi i) = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}.$$

5.3.1. Mellin Spline Çekirdeği

$r \in \mathbb{R}$ için r_+ r'nin positif kısmını göstersin. Yani, $(r)_+ = \max\{0, r\}$ olsun. Mellin spline çekirdeği her $m \in \mathbb{N}$ için

$$B_m(t) := \frac{1}{(m-1)!} \sum_{j=0}^{m} (-1)^j \binom{m}{j} \left(\frac{m}{2} + \log(t) - j\right)_+^{m+1}, \quad (t \in \mathbb{R}_+)$$

olarak tanımlanır. Daha genel olarak,

$$B_{c,m}(t) = t^{-c}B_m(t), \quad (t \in \mathbb{R}_+)$$

alınabilir.

$B_{c,m}$, $\mathbb{R}_+$'de kompakt desteğe sahip ve sürekli olduğundan her $c \in \mathbb{R}$ için $B_{c,m} \in X_c$'dir. Yani $s = c + \mathrm{i}v$ için $[B_{c,m}]^\wedge_M$ Mellin dönüşümü yazılabilir.

$$\begin{aligned}[B_{c,m}]^\wedge_M(s) &= \int_0^{+\infty} B_{c,m}(t) t^{s-1} dt \\ &= \int_0^{+\infty} B_{c,m}(t) t^{c+\mathrm{i}v-1} dt \\ &= \int_0^{+\infty} B_{c,m}(t) e^{(c+\mathrm{i}v)\log(t)} \frac{dt}{t}.\end{aligned}$$

Burada, $\log(t) = z$ dönüşümü yapılıp $\widetilde{B}_m(z) := B_m(e^z)$ alınırsa, her $c \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned} &= \int_0^{+\infty} t^{-c} B_m(t) e^{(c+\mathrm{i}v)\log(t)} \frac{dt}{t} \\ &= \int_0^{+\infty} (e^z)^{-c} B_m(e^z) e^{(c+\mathrm{i}v)z} dz \\ &= \int_0^{+\infty} \widetilde{B}_m(z) e^{ivz} dz \\ &= \widehat{\widetilde{B}_m}(-v)\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\widetilde{B_m}(t) = \frac{1}{(n-1)!} \sum_{j=0}^{m} (-1)^j \binom{m}{j} \left(\frac{m}{2} + t - j\right)_+^{m+1}$$

elde edilir ki bu da n-ninci mertebeden klasik B-spline çekirdeğidir. Klasik B-spline çekirdeğinin Fourier dönüşümü

$$\mathrm{sinc}(x) := \begin{cases} \sin(\pi x)/\pi x, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

olmak üzere

$$\widehat{\widetilde{B_m}} = \mathrm{sinc}^m(v/2\pi), v \in \mathbb{R}$$

dir (Acar ve ark., 2020). Sonuç olarak, klasik B-spline çekirdeğinin Fourier dönüşümü yerine yazılırsa

$$[B_{c,m}]\,\hat{M}(c + \mathrm{i}v) = \left(\frac{\sin(v/2)}{v/2}\right)^m$$

bulunur.

Şimdi $c = 0$ alarak $t \in \mathbb{R}^+$ için $B_{0,m}(t) =: B_m(t)$ olmak üzere

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} B_m\left(e^k x\right) = 1, \quad \forall x > 0$$

olduğunu gösterelim. Mellin-Poisson toplam formülü kullanılırsa,

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} B_m\left(e^k x\right) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} [B_m]_M^{\wedge}(2k\pi \mathrm{i}) x^{-2k\pi \mathrm{i}} \tag{5.9}$$

elde edilir. Burada, $[B_m]_M^{\wedge}$ Mellin dönüşümü, klasik B-spline çekirdeğinin Fourier dönüşümüne denkti. Klasik B-spline çekirdeğinin Fourier dönüşümünün

$$\left[\hat{B_m}\right](2k\pi) = \begin{cases} 1, & k \in \mathbb{Z} \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}$$

olduğu (5.9) denkleminde kullanılırsa

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} B_m\left(e^k x\right) = 1, \quad \forall x > 0$$

gösterilmiş olur ki bununla da Mellin spline çekirdeği $(\varphi.5_1)$ şartını sağlamış olur. Momentler üzerindeki şartlara bakacak olursak, B_m fonksiyonları kompakt desteğe sahip olduğundan tüm $k = 0, 1, 2, ...$ değerleri için $M_k(B_m)$, mutlak momentleri sonlu sayılardır (gerçekten de seriler sonlu sayıda sıfırdan farklı terim içerir) ve cebirsel momentlerin değerleri $j = 1, 2, \ldots$ sayıları için $\psi_j(u) := (\mathrm{i}\log(u))^j B_m(u)$, fonksiyonuna Mellin-Poisson formülü uygulanarak elde edilebilir. Örneğin, $c = 0$ için integral işaretinin altında türetme yapılırsa

$$\frac{d^j}{dt^j}[B_m]_M^{\wedge}(\mathrm{i}t) = [\psi_j]_M^{\wedge}(\mathrm{i}t),$$

bulunur. ψ fonksiyonları için Mellin-Poisson formülü

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \psi\left(e^{-k} x\right) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{d^j}{dt^j}[B_m]_M^{\wedge}(2k\pi \mathrm{i}) x^{-2k\pi \mathrm{i}}$$

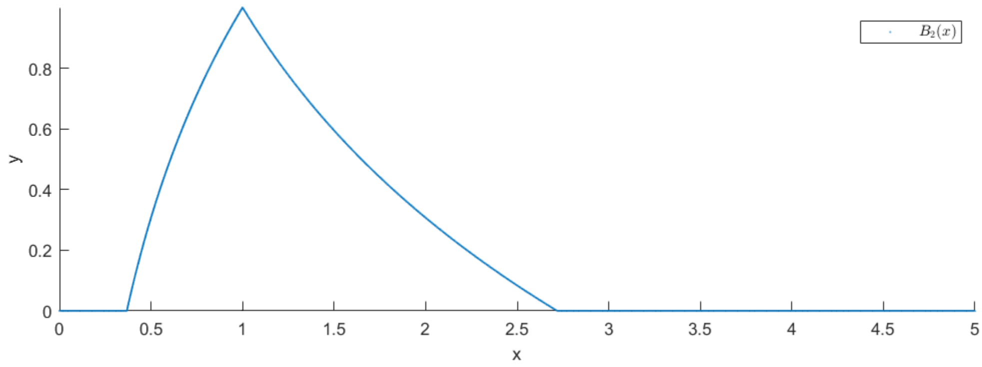
olur ki bu da

$$i^j m_j(B_m) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{d^j}{dt^j}[B_m]_M^{\wedge}(2k\pi \mathrm{i}) x^{-2k\pi \mathrm{i}}$$

olarak yazılabilir. Buradan tüm $j = 1, ..., n$ sayıları için $m_j(B_m, x)$ cebirsel momentlerinin x'den bağımsız olduğu görülür. Böylece $(\varphi.5_2)$ ve $(\varphi.5_3)$ şartları da sağlanmış olur.

Mellin spline çekirdeğinin özel bir durumunu ele alalım. $m = 2, c = 0$ için ikinci mertebeden Mellin spline çekirdeği

$$B_2(x) := (1 - |\log(x)|)_+ = \begin{cases} 1 + \log(x), & e^{-1} < x \leq 1 \\ 1 - \log(x), & 1 < x < e \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$



Şekil 5.1. İkinci mertebeden Mellin spline çekirdeğinin grafiği

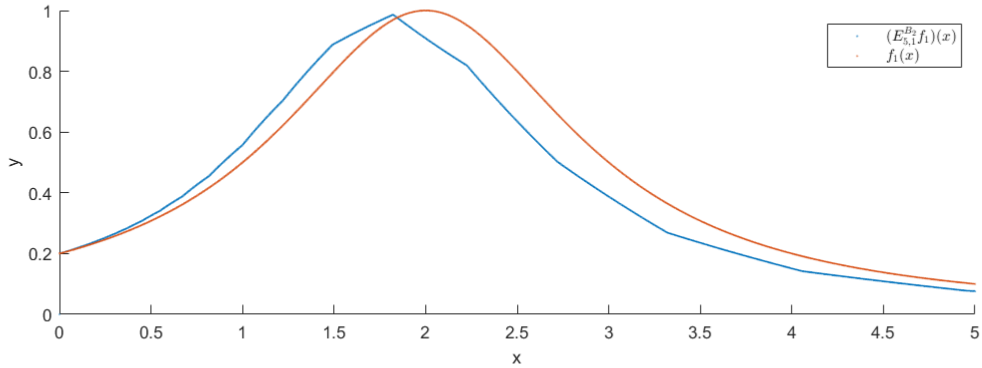
olarak elde edilir. Bu fonksiyonun grafiği Şekil 5.1'de verilmiştir.

(5.1) tanımında $n = 1$ alınırsa, ÇDESKS'nin $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ fonksiyonları için

$$(E^{\varphi}_{w,1} f)(x) = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}} \varphi(e^{-k} x^w) w \int_{k/w}^{(k+1)/w} f(e^u) du, \quad (w > 0) \tag{5.10}$$

olarak yazılır.

$f_1(x) = \dfrac{1}{1 + (x-2)^2}$ olarak alalım. f_1 fonksiyonunun B_2 çekirdeği altında $w = 5$ ve $w = 15$ seçimleri ile ÇDESKS uygulanması sonucunda elde edilen grafikler Şekil 5.2 ve Şekil 5.3'de verilmiştir.

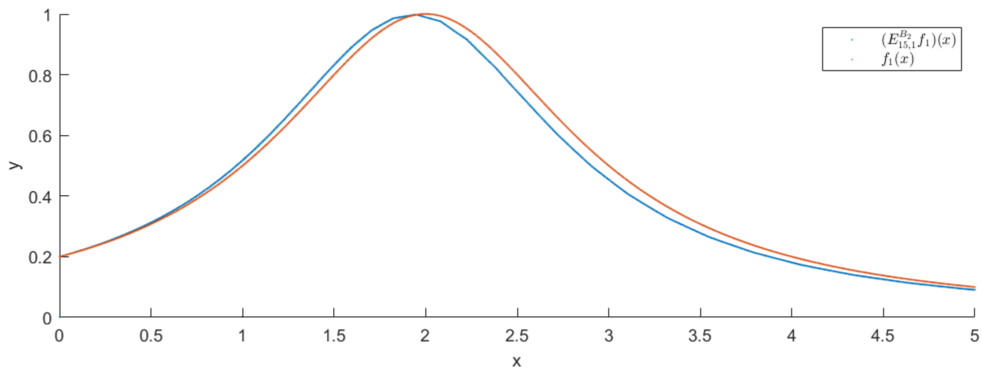


Şekil 5.2. $w = 5$ alınarak 2. mertebeden Mellin spline çekirdeği kullanılan exponansiyel sampling Kantorovich operatörleri altındaki f_1 fonksiyonunun ve f_1 fonksiyonunun grafiği

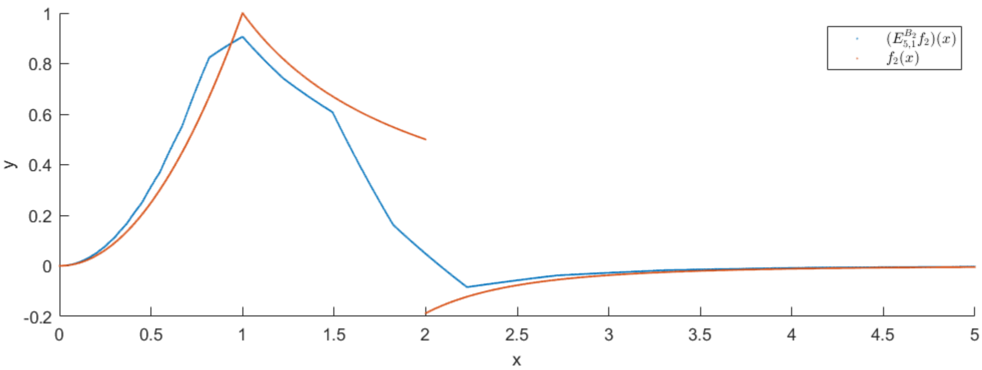
$f_2 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$f_2(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x < 1 \\ \dfrac{1}{x}, & 1 \leq x < 2 \\ \dfrac{-3}{x^4}, & 2 \leq x \end{cases}$$

kuralı ile verilsin. f_2 fonksiyonunun $w = 5$ ve $w = 15$ seçimleri ile B_2 çekirdeği kullanılarak ÇDESKS altındaki görüntüsü sırasıyla Şekil 5.4 ve Şekil 5.5'de verilmiştir.



Şekil 5.3. $w = 15$ alınarak 2. mertebeden Mellin spline çekirdeği kullanılan exponansiyel sampling Kantorovich operatörleri altındaki f_1 fonksiyonunun ve f_1 fonksiyonunun grafiği



Şekil 5.4. $w = 5$ alınarak 2. mertebeden Mellin spline çekirdeği kullanılan exponansiyel sampling Kantorovich operatörleri altındaki f_2 fonksiyonunun ve f_2 fonksiyonunun grafiği

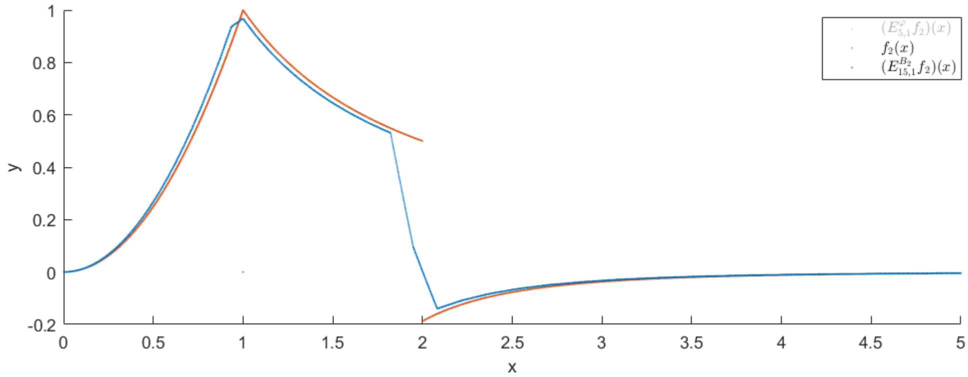
Şimdi, (5.1) serilerinin inşa amacına hizmet etmesi açısından fonksiyon uzayını tek değişkenli fonksiyonlar yerine çok değişkenli fonksiyonlar olacak şekilde tekrar ele alalım. İlk olarak iki değişkenli fonksiyonlar uzayını göz önüne alarak burada kullanabilmek adına Mellin spline çekirdeğinin iki değişkenli fonksiyonlar uzayındaki genelleştirmesini ifade edelim. $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$B_{m_1,m_2}(x_1, x_2) = B_{m_1}(x_1)B_{m_2}(x_2)$$

olarak tanımlanır. Özel olarak $n = m = 2$ alınırsa,

$$B_{2,2}(x_1, x_2) = \begin{cases} (1 + \log(x_1))(1 + \log(x_2)), & e^{-1} < x_1, x_2 \leq 1 \\ (1 - \log(x_1))(1 + \log(x_2)), & 1 < x_1 < e, e^{-1} < x_2 \leq 1 \\ (1 + \log(x_1))(1 - \log(x_2)), & e^{-1} < x_1 \leq 1, 1 < x_2 < e \\ (1 - \log(x_1))(1 - \log(x_2)), & 1 < x_1, x_2 < e \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

elde edilir.



Şekil 5.5. $w = 15$ alınarak 2. mertebeden Mellin spline çekirdeği kullanılan exponansiyel sampling Kantorovich operatörleri altındaki f_2 fonksiyonunun ve f_2 fonksiyonunun grafiği

$f_3 : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $f_3(x) := \dfrac{1}{x^2 + y^2}$ kuralı ile tanımlansın. $n = 2, j = 1$ için ÇDESKS

$$(E^{\varphi}_{\mathbf{w},1} f)(\mathbf{x}) = \sum_{(k_1,k_2)\in\mathbb{Z}^2} \varphi(e^{-k_1} x_1^{w_1}, e^{-k_2} x_2^{w_2}) w_1 \int_{k_1/w_1}^{(k_1+1)/w_1} f(e^u, e^{k_2/w_2}) du \tag{5.11}$$

formunu alır. (5.11) serisinin f_3 fonksiyonu altındaki görüntüsü ile f_3 fonksiyonunun arasındaki hata miktarı Tablo 5.1, 5.2 ve Tablo 5.3'de verilmiştir.

w_1	$\lvert(E^{B_{2,2}}_{w_1,5} f_3)(3,2) - f_3(3,2)\rvert$
1	0.035480144
10	0.005350959
14	0.003854663
50	0.001236564
110	0.000661183

Tablo 5.1. $w_2 = 5$ alınarak $B_{2,2}$ çekirdeği kullanılan ÇDESKS altındaki f_3 fonksiyonu ile f_3 fonksiyonunun arasındaki hata miktarı

w_1	$\lvert(E^{B_{2,2}}_{w_1,15} f_3)(3,2) - f_3(3,2)\rvert$
1	0.035400589
10	0.005197164
14	0.003699357
20	0.002644117

Tablo 5.2. $w_2 = 15$ alınarak $B_{2,2}$ çekirdeği kullanılan ÇDESKS altındaki f_3 fonksiyonu ile f_3 fonksiyonunun arasındaki hata miktarı

$f_4 : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $f_4(x, y) = \cos(x^2 - y^2)$ kuralı ile tanımlansın. f_4 fonksiyonunun (5.11) serisi altındaki görüntüsü ile f_4 fonksiyonu arasındaki hata miktarı Tablo 5.4, Tablo 5.5 ve Tablo 5.6'da verilmiştir.

w_1	$\lvert(E^{B_{2,2}}_{w_1,20}f_3)(3,2)-f_3(3,2)\rvert$
10	0.035393703
14	0.003685967
20	0.002630563
25	0.002096640

Tablo 5.3. $w_2 = 20$ alınarak $B_{2,2}$ çekirdeği kullanılan ÇDESKS altındaki f_3 fonksiyonu ile f_3 fonksiyonunun arasındaki hata miktarı

w_1	$\lvert(E^{B_{2,2}}_{w_1,5}f_4)(2.2,1.7)-f_4(2.2,1.7)\rvert$
5	0.00096960
10	0.00038989
50	0.00007250

Tablo 5.4. $w_2 = 5$ alınarak $B_{2,2}$ çekirdeği kullanılan ÇDESKS altındaki f_4 fonksiyonu ile f_4 fonksiyonunun arasındaki hata miktarı

Son olarak, Mellin spline çekirdeğini 3 değişkenli fonksiyonlar uzayında ifade ederek $f(x,y,z) = x + y/z^2$ kuralı ile verilen $f_5 : \mathbb{R}^3_+ \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun ÇDESKS altındaki görüntüsünü inceleyelim. $m_1, m_2, m_3 \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$B_{m_1,m_2,m_3}(x,y,z) = B_{m_1}(x)B_{m_2}(y)B_{m_3}(z)$$

olarak tanımlanır. Ayrıca, $n = 3, j = 2$ seçimi altında ÇDESKS

$$(E^{\varphi}_{\mathbf{w},2}f)(\mathbf{x}) = \sum_{(k_1,k_2,k_3)\in\mathbb{Z}^3} \varphi(e^{-k_1}x_1^{w_1}, e^{-k_2}x_2^{w_2}, e^{-k_3}x_3^{w_3})w_2 \int_{k_2/w_2}^{(k_2+1)/w_2} f(e^{k_1/w_1}, e^{u}, e^{k_3/w_3})du \tag{5.12}$$

formunu alır. f_5 fonksiyonunun $(1,1,2)$ noktasındaki değeri ile aynı noktanın (5.12) serileri altındaki değeri arasındaki hata miktarı Tablo 5.7, Tablo 5.8 ve Tablo 5.9'da verilmiştir.

5.3.2. Mellin Fejer Çekirdeği

Mellin Fejer çekirdeği, $x \in \mathbb{R}_+, \rho > 0$ ve $c \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$F^c_\rho(x) := \begin{cases} F^c_\rho(x) := \frac{x^{-c}}{2\pi}\rho\,\mathrm{sinc}^2\left(\frac{\rho}{\pi}\log(\sqrt{x})\right) & x \neq 1 \\ \dfrac{\rho}{2\pi} & x = 0 \end{cases}$$

olarak tanımlanır. Bu çekirdek kompakt desteğe sahip değildir fakat $F^c_\rho \in X_c$'dir ve X_c uzayındaki Mellin dönüşümü

$$\left[F^c_\rho\right]^\wedge_M (c + iv) = \begin{cases} 1 - \frac{|v|}{\rho}, & |v| \leq \rho \\ 0, & |v| > \rho \end{cases}$$

w_1	$\lvert(E^{B_{2,2}}_{w_1,10}f_4)(2.2,1.7)-f_4(2.2,1.7)\rvert$
5	0.00097520
10	0.00038850
50	0.00006615

Tablo 5.5. $w_2 = 10$ alınarak $B_{2,2}$ çekirdeği kullanılan ÇDESKS altındaki f_4 fonksiyonu ile f_4 fonksiyonunun arasındaki hata miktarı

w_1	$\lvert(E^{B_{2,2}}_{w_1,50}f_4)(2.2,1.7)-f_4(2.2,1.7)\rvert$
5	0.00097528
10	0.00038635
50	0.00006243

Tablo 5.6. $w_2 = 50$ alınarak $B_{2,2}$ çekirdeği kullanılan ÇDESKS altındaki f_4 fonksiyonu ile f_4 fonksiyonunun arasındaki hata miktarı

olarak verilir. Örneğin, $c = 0$ ve $\rho = 1$ alınırsa (χ_A, A kümesinin karakteristik fonksiyonunu göstermek üzere)

$$\left[F_1^0\right]^{\wedge}_M(\mathrm{i}v) = (1-|v|)\chi_{[-1,1]}(v)$$

elde edilir. Her $x > 0$ için $g(ex) = g(x)$ formunda tekrarlayan

$$g(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} F_1^0\left(e^k x\right), \quad (x>0)$$

fonksiyonu alınırsa, Mellin-Poisson toplam formülünden

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} F_1^0\left(e^k x\right) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left[F_1^0\right]^{\wedge}_M(2k\pi\mathrm{i})x^{-2k\pi\mathrm{i}} = \left[F_1^0\right]^{\wedge}_M(0) = 1$$

elde edilir ki, $(\varphi.5_1)$ koşulu sağlanmış olur. $(\varphi.5_2)$ koşulu için $u \in \mathbb{R}_+$'ya göre

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\sum_{|k-\log(u)|>r}\mathrm{sinc}^2\left(\log\left(\sqrt{e^{-k}u}\right)\right) = 0$$

limitinin düzgün olduğunu göstermek yeterlidir.

ν tam sayı olmak üzere $\nu < \log(u) < \nu+1$ şartını sağlayan u'lar için

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^2\left(\frac{1}{2}(\log(u)-k)\right)}{|\log(u)-k|^{3/2}} \le 1 + \sum_{k\in\mathbb{Z},k\neq\nu,\nu+1}\frac{\sin^2\left(\frac{1}{2}(\log(u)-k)\right)}{|\log(u)-k|^{3/2}}$$

yazabiliriz. Son kısımdaki seri

$$2\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^{3/2}} \tag{5.13}$$

serisi ile sınırlı ve (5.13) serisi yakınsak olduğundan $(\varphi.5_2)$ elde edilmiş olur. O halde Teorem 5.6 ve Teorem 5.7 teoremleri için Mellin Fejer çekirdeği göz önüne alınabilir. Fakat

w_2	$\lvert(E^{B_{2,2,2}}_{3,w_2,3}f_5)(1,1,2)-f_5(1,1,2)\rvert$
3	0.0507538450
5	0.0305259499
10	0.0165113293

Tablo 5.7. $w_1 = w_3 = 3$ seçimi altında $B_{2,2,2}$ çekirdeği kullanılarak f_5 fonksiyonunun ÇDESKS altındaki görüntüsünün ve f_5 fonksiyonunun arasındaki hata miktarı

w_2	$\lvert(E^{B_{2,2,2}}_{5,w_2,4}f_5)(1,1,2)-f_5(1,1,2)\rvert$
5	0.0334484226
7	0.0252398312
10	0.0192878000

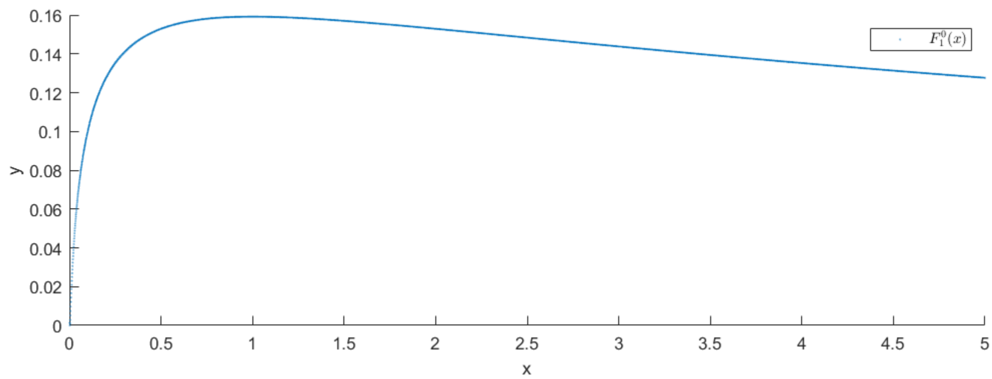
Tablo 5.8. $w_1 = 5, w_3 = 4$ seçimi altında $B_{2,2,2}$ çekirdeği kullanılarak f_5 fonksiyonunun ÇDESKS altındaki görüntüsünün ve f_5 fonksiyonunun arasındaki hata miktarı

$M_1(F^c_\rho) = +\infty$ olduğundan Teorem 5.8 uygulanırken Mellin Fejer çekirdeği kullanılamaz. Buna rağmen $\alpha \in (0,1)$ sayıları için $M_\alpha(F^c_\rho) < +\infty$ olduğundan Teorem 5.4 için Mellin Fejer çekirdeği göz önüne alınabilir.

Mellin Fejer çekirdeği çok değişkenli fonksiyonlar uzayı için Mellin spline çekirdeğinde olduğu gibi tek değişkenli fonksiyonlar uzayına ait halinin kendisi ile çarpılması ile genelleştirilebilir. Örneğin, iki değişkenli fonksiyonlar uzayında Mellin Fejer çekirdeği, $(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2_+$, $\rho_1, \rho_2 > 0$ ve $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$F^{c_1,c_2}_{\rho_1,\rho_2}(x_1,x_2) = F^{c_1}_{\rho_1}(x_1)\, F^{c_2}_{\rho_2}(x_2)$$

olarak tanımlanır.



Şekil 5.6. $c = 0, \rho = 1$ için Mellin Fejer çekirdeğinin grafiği

w_2	$\lvert(E^{B_{2,2,2}}_{8,w_2,10} f_5)(1,1,2) - f_5(1,1,2)\rvert$
15	0.0088715967
20	0.0067024998
25	0.0054126129

Tablo 5.9. $w_1 = 5, w_3 = 4$ seçimi altında $B_{2,2,2}$ çekirdeği kullanılarak f_5 fonksiyonunun ÇDESKS altındaki görüntüsünün ve f_5 fonksiyonunun arasındaki hata miktarı

KAYNAKLAR

Acar, T., Costarelli, D., ve Vinti, G., 2020, Linear prediction and simultaneous approximation by m-th order kantorovich type sampling series, *Banach J. Math. Anal.*, 14(4):1481–1508.

Altomare, F. ve Campiti, M., 1994, *Korovkin-type approximation theory and its applications*, De Gruyter Studies in Mathematics, 17, De Gruyter.

Angamuthu, S. K. ve Bajpeyi, S., 2020, Direct and inverse results for kantorovichtype exponential sampling series, *Results Math*, 75(119):1422–6383.

Angeloni, L., Costarelli, D., ve Vinti, G., 2018, A characterization of the convergence in variation for the generalized sampling series, *Annales Academiæ Scientiarum Fennicae*, 43:755–767.

Angeloni, L., Costarelli, D., ve Vinti, G., 2020, Approximation properties of mixed sampling-kantorovich operators, *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales.Serie A. Matemáticas*, 115(1):1–14.

Anonim, 2020, What is a signal, x-engineer.org.

Asdrubali, F., Baldinelli, G., Bianchi, F., Costarelli, D., Rotili, A., Seracini, M., ve Vinti, G., 2018, Detection of thermal bridges from thermographic images by means of image processing approximation algorithms, *Applied Mathematics and Computation*, 317:160–171.

Bardaro, C., Bevıgnanı, G., Mantellini, I., ve Seracini, M., 2019, Bivariate generalized exponential sampling series and applications to seismic waves, *Constructive Mathematical Analysis*, 2:153 – 167.

Bardaro, C., Butzer, P. L., ve Mantellini, I., 2014, The exponential sampling theorem of signal analysis and the reproducing kernel formula in the mellin transform setting, *Sampling Theory in Signal and Image Processing*, 13(1):35–66.

Bardaro, C., Butzer, P. L., ve Mantellini, I., 2016a, The mellin-parseval formula and its interconnectionswith the exponential sampling theorem of optical physics, *Integral Transforms Spec. Funct.*, s. 17–29.

Bardaro, C., Butzer, P. L., Mantellini, I., ve Schmeisser, G., 2016b, On the paley–wiener theorem in the mellin transform setting, *Journal of Approximation Theory*, 207:60 – 75.

Bardaro, C., Faina, L., ve Mantellini, I., 2017, A generalization of the exponential sampling series and its approximation properties, *Mathematica Slovaca*, 67(6):1481–1496.

Bardaro, C. ve Mantellini, I., 2011, A note on the voronovskaja theorem for mellin-fejer convolution operators, *Appl. Math. Lett.*, 24:2064–2067.

Bardaro, C. ve Mantellini, I., 2014, On mellin convolution operators: a direct approach to the asymptoticformulae, *Integral Transforms Spec. Funct.*, 25:182–195.

Bardaro, C., Vinti, G., Butzer, P. L., ve Stens, R. L., 2007, Kantorovich-type generalized sampling series in the setting of orlicz spaces, *Sampling Theory in Signal and Image Processing*, 6(1):29–52.

Baskakov, V. A., 1961, On various convergence criteria for linear positive operators (russian), *Usp.Mat. Nauk*, 16(1):131–134.

Bernstein, S. N., 1912, Demonstration du theoreme de weierstrass fondee sur le calcul des probabilites, *Comm. Soc. Math. Kharkow*, 13:1–2.

Bertero, M. ve Pike, E. R., 1991, Exponential-sampling method for laplace and other dilationally invariant transforms: I. singular-system analysis, *Inverse Problems*, 7(1):1–20.

Bleimann, G., Butzer, P. L., ve Hahn, L., 1980, A bernstein-type operator approximatingcontinuous functions on the semi-axis, *Indag. Math.*, 42:255–262.

Bohman, H., 1952, On approximation of continuous and analytic functions, *Ark. Mat*, 2:43–56.

Brown, J. L., 1972, Uniform linear prediction of bandlimited processes frompast samples, *IEEE Trans. Information Theory*, IT-18:662–664.

Butzer, P. L., Fischer, A., ve Stens, R. L., 1990a, Generalized sampling approximation of multivariate signals; general theory, In *Fourth Meeting on Real Analysis and Measure Theory*, Capri, Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena.

Butzer, P. L., Fischer, A., ve Stens, R. L., 1990b, Generalized sampling approximation of multivariate signals; theory and some applications, *Note di Matematica*, X:173–191.

Butzer, P. L. ve Jansche, S., 1997, A direct approach to the mellin transform, *J. Fourier Anal. Appl.*, 3:325–375.

Butzer, P. L. ve Jansche, S., 1998a, The exponential sampling theorem of signal analysis, *Atti Sem. Mat. Fis.Univ. Modena*, 46:99–122.

Butzer, P. L. ve Jansche, S., 1998b, *The finite Mellin transform, Mellin-Fourier series and the Mellin-Posson summation formula*, volume 52 of *2*, s. 55–81, R. C. Mater., Palermo.

Butzer, P. L., Ries, S., ve Stens, R. L., 1987, Approximation of continuous and discontinuousfunctions by generalized sampling series, *Journal of Approximation Theory*, 50:25–39.

Butzer, P. L., Splettstößer, W., ve Stens, R. L., 1988, The sampling theorem and linear prediction in signal analysis, *Jahresber. Deutsch Math.- Verein*, 90:1–70.

Butzer, P. L. ve Stens, R. L., 1992, Sampling theory for not necessarily bandlimitedfunctions;

an historical overview, *SIAM Review*, 34:40–53.

Butzer, P. L. ve Stens, R. L., 1993, *Linear Prediction by Samples from the Past*, chapter 5, s. 157–183, Springer.

Butzer, P. L. ve Stens, R. L., 2008, Reconstruction of signals in $l_p(\diagdown)$-space by generalized sampling series based on linear combinations of b-splines, *Integral Transforms and Special Functions*, 19(1):35–58.

Bézier, P., 1966, Définition numérique des courbes et surfaces i, *Automatisme*, XI:625–632.

Bézier, P., 1967, Définition numérique des courbes et surfaces ii, *Automatisme*, XII:17–21.

Cantarini, M., Costarelli, D., ve Vinti, G., 2020, A solution of the problem of inverse approximation forthe sampling kantorovich operators in case of lipschitz functions, *Dolomites Research Noteson Approximation*, 13(1):30–35.

Casasent, D., editor 1978, *Optical Data Processing*, s. 241–282, Springer.

Cömert, Z., 2015, *Fourier Dönüşümü*.

Costarelli, D., Cluni, F., Minotti, A. M., ve Vinti, G., 2014, Applications of sampling kantorovich operators to thermographic images for seismic engineering, *arXiv preprint arXiv:1411.2584*.

Costarelli, D., Seracini, M., ve Vinti, G., 2020, A comparison between the sampling kantorovich algo-rithm for digital image processing with some interpolation and quasi-interpolation methods, *Applied Mathematics and Computation*, 374:125046.

Costarelli, D. ve Vinti, G., 2011, Approximation by multivariate generalized sampling kantorovich operators in the setting of orlicz spaces, *Bollettino dell'Unione Matematica Italiana*, 4(3):445–468.

Costarelli, D. ve Vinti, G., 2013, Approximation by nonlinear multivariate sampling kantorovich type operators and applications to image processing, *Numerical Functional Analysis and Optimization*, 34(8):819–844.

Costarelli, D. ve Vinti, G., 2016, Approximation by max-product neural network operators of kantorovich type, *Results in Mathematics*, 69(3-4):505–519.

Cárdenas-Morales, D., Garrancho, P., ve Rasa, I., 2011, Bernstein-type operators which preserve polynomials, *Comput. Math. Appl.*, 62(1):158–163.

de Bruijn, N. G., 1973, A theory of generalized functions, with applications towigner distribution and weyl correspondence, *Nieuw Arch. Wiskunde*, 21:205–280.

de Casteljau, P., 1993, *Polar forms for curve and surface modelling asused at Citroen*, chapter 1, s. 1–11, Academic Press, London.

de la Vallée Poussin, C. J., 1908, Sur l'approximation des fonctions d'une variable reelle etleurs derivees par des polynomes et des suites limitees de fourier, *Bull. Acad. RoyaleBelgique*, 3:193–254.

DeVore, R. A. ve Lorentz, G. G., 1993, *Constructive approximation*, volume 303, Springer Science & Business Media.

Durrmeyer, J. L., 1967, *Une formule d'inversion de la transforme de Laplace : Applications a la theorie des moments*, PhD thesis, These de 3e Cycle Faculte des Sciences de I' Universite de Paris.

Fejér, L., 1916, Ueber interpolation, *Nachr. Gesell. Wiss. Gottingen Math. Phys. Kl.*, s. 66–91.

Fejér, L., 1930, U ber weierstrasssche approximation, besonders durch hermitesche interpolation, *Math. Ann.*, 102:707–725.

Gonska, H., Pitul, P., ve Rasa, I., 2009, General king-type operators, *Results Math*, 53:279–286.

Gori, F., 1993, *Advances Topics in Shannon Sampling and Interpolation Theory*, chapter Sampling in optics., s. 37–83, Springer, Newyork, ii edition.

Hacısalihoğlu, H. H. ve Hacıyev, A. D., 1995, *Lineer Pozitif Operatör Dizilerinin Yakınsaklığı*, A.Ü.F.F. Döner Sermaye İşletmesi Yayınları, Ankara.

II, R. J. M., 1991, *Introduction to Shannon Sampling and Interpolation Theory*, Springer-Verlag, New York.

Jaramillo, J. D. V., 2019, Poisson summation formula, Lecture Notes in Physics.

Kantorovich, L. V., 1930, Sur certains developpements suivant les polynomes de la forme de s. bernstein i, ii, *C. R. Acad. URSS*, s. 563–568, 595–600.

King, I. P., 2003, Positive linear operators which preserve x2, *Acta Math. Hungar*, 99(3):203–208.

Koçak, M., 2011, *Genel Topolojiye Giriş ve Problem Çözümleri*, Kampüs Yayıncılık, Kütahya, Türkiye.

Korovkin, P. P., 1959, On convergence of linear positive operators in the space of continuous functions, *DOKL. Akad. Nouk. SSR*, 90:961–964.

Kotel'nikov, V. A., 1933, On the carrying capacity of "ether" and wire in electrocommunications, In Idz. Red. Upr. Svyazi RKKA (Moscow), Material forthe first all-union conference on the questions of communications.

Kursun, S., Turgay, M., Alagoz, O., ve Acar, T., 2021, Approximation properties of multivariate exponential sampling series, *Submitted*.

Landau, E., 1908, U ber die approximation einer stetigen funktion durch eine ganze rationalefunktion, *Rend. Circ. Mat. Palermo*, 25:337–345.

Lebesgue, H., 1898, Sur l'approximation des fonctions, *Bull. Sciences Math.*, 22:278–287.

Lerch, M., 1892, About the main theorem of the theory of generating functions (in czech), *Rozpravy Ceske Akad.*, 33:681–685.

Lerch, M., 1903, Sur un point de la theorie des fonctions generatrices d'abel, *Acta Math.*, 27:339–351.

Lorentz, G. G., 1953, *Bernstein Polynomials*, University of Toronto Press, Toronto, 2 edition.

Luke, H. D., 1978, Zur entsehung des abtasttheorems, *Nachr. Techn. Z.*, 31:271–274.

Lupas, A. ve Müller, M., 1967, Approximations eigenschaften der gamma operatoren, *Math. Hung.*, 98:208–226.

Maddox, I. J., 1989, *Elements of Functional Analysis*, Cambridge University Press, Newyork, 2 edition.

Mamedov, R. G., 1991, *The Mellin Transform and Approximation Theory, (in Russian)*, ”Elm”.

Meyer-König, W. ve Zeller, K., 1960, Bernsteinsche potenzreihen, *Studia Math.*, 19:89–94.

Mittag-Leffler, G., 1900, Sur la representation analytique des functions d'une variable reelle, *Rend. Circ. Mat. Palermo*, 14:217–224.

Nyquist, H., 1928, Certain topics in telegraph transmission theory, *AIEE Trans.*, 47:614–644.

Ostrowsky, N., Sornette, D., Parker, P., ve Pike, E. R., 1981, Exponential sampling method for light scattering polydispersity analysis, *Optica Acta: International Journal of Optics*, 28(8):1059–1070.

Ostrowsky, N., Sornette, D., Parker, P., ve Pike, E. R., 1994, Exponential sampling method for lightscattering polydispersity analysis, *Opt. Acta*, 28:1059–1070.

Picard, E., 1891, Sur la representation approchee des fonctions, *C. R. Heb. Seances Acad. Sci.Paris*, 112:183–186.

Runge, C., 1885, Zur theorie der eindeutigen analytischen functionen, *Acta Math. 6*, 6:229–244.

Runge, C., 1886, U ber die darstellung willku rlicher functionen, *Acta Math. 7*, 7:387–392.

Shannon, C. E., 1949, Communications in the presence of noise, *Proc. IRE*, 37:10–21.

Splettstößer, W., 1980, Error analysis in the walsh sampling theorem, *In 1980 IEEE International Symposium on Electromagnetic Compatibility*, 409:366–370.

Splettstößer, W., 1981, *Bandbegrenzte und effektiv bandbegrenzte funktionenund ihre praedik-tion aus abtastwerten*, Habilitationsschrift, RWTH Aachen.

Splettstößer, W., 1983, 75 years aliasing error in the sampling theorem, In Schussler, H., editor, *Signal Processing: Theories and Applications*, s. 1–4, Amsterdam - New York - Oxford, North-Holland Publishing Company.

Szász, O. M., 1950, Generalizations of s. bernstein' s polynomial to the infinite interval, *J. Res. Nat. Bur. Standars*.

Turgay, M., Kursun, S., ve Acar, T., 2020, Multidimensional kantorovich modifications of exponantial sampling series, *Submitted*.

Volterra, V., 1897, Sul principio di dirichlet, *Rend. Circ. Mat. Palermo*, 11:83–86.

Wainstein, L. A. ve Zubakov, V. D., 1962, *Extraction of Signals from Noise*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.

Weierstrass, K. T. W., 1885, Uber die analytische darstellbarkeit sogenannter willkurlicher functionen einer reellen veranderlichen, *Verl. d. Kgl. Akad. d. Wiss. Berlin*, 2:633–639.

Whittaker, E. T., 1915, On the functions which are represented by the expansionsof the interpolation theory, *Proc. Royal Society Edinburgh*, 35:181–194.

Winkel, R., 2001, Generalized bernstein polynomials and bézier curves: An application of umbral calculus to computer aided geometric design, *Advances in Applied Mathematics*, 27(1):51 – 81.

Zayed, A., 2018, *Advances in Shannon's Sampling Theory*, Routledge.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

AdıSoyadı: Metin Turgay
Uyruğu : Türkiye Cumhuriyeti

EĞİTİM

Derece	Kurum	Bitirme Yılı
Lisans	Dokuz Eylül Üniversitesi	2018
Yüksek Lisans	Selçuk Üniversitesi	2021

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	Kurum	Görevi
2	Selçuk Üniversitesi	Araştırma Görevlisi

UZMANLIK ALANI

Matematik, Fonksiyonlar Teorisi ve Fonksiyonel Analiz

YABANCI DİLLER

İngilizce

SERTİFİKALAR

Dokuz Eylül Üniversitesi Fen Fakültesi Bilgisayar Bilimleri Bölümü Yandal program sertifikası

BELİRTMEK İSTEDİĞİNİZ DİĞER ÖZELLİKLER

İleri Seviye C Programlama Bilgisi
İleri Seviye C# Programlama Bilgisi
İleri Seviye HTML Bilgisi
İleri Seviye Latex Bilgisi
Orta Seviye MATLAB Bilgisi
Orta Seviye Mathematica Bilgisi
Orta Seviye Photoshop Bilgisi
Orta Seviye Pyhton Programlama Bilgisi
Başlangıç Seviye SQL Bilgisi
Başlangıç Seviye Android Studio Bilgisi

YAYINLAR

Turgay M., Kursun S., Acar T., 2020, Multidimensional Kantorovich Modifications of Exponential Sampling Series, yayıma gönderildi.

Kursun S., Turgay M., Alagöz O., Acar T., 2021, Multidimensional Modifications of Exponential Sampling Series, yayıma gönderildi.

BİLDİRİLER

Turgay M., 2020, Ağırlıklı Uzaylarda Bohmann-Korovkin Teoremi, *Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi Matematik Bölümü Seminerleri*, Bilecik, Türkiye.

Turgay M., Kursun S., Acar T., 2020, Convergence properties of exponential sampling Kantorovich series for multivalued functions, *First Online Conference on Modern Fractional Calculus and its Applications*, Istanbul, Türkiye.

Kursun S., Turgay M., Acar T., 2020, Multidimensional Mellin-Taylor Formula and Applications to Voronovskaya Type Theorem, *First Online Conference on Modern Fractional Calculus and its Applications*, İstanbul, Türkiye.

Turgay M., Kursun S., Acar T., 2021, Kantorovich modifications of sampling type operators for multivalued functions, *International Online Workshop on Approximation Theory*, Kiev, Ukraine.

Kursun S., Turgay M., Alagoz O., Acar T., 2021, Approximation properties of multivariate sampling type operators, *International Online Workshop on Approximation Theory*, Kiev, Ukraine.