

Fonksiyonlar Teorisi II Uygulama Notları

Metin Turgay

24.02.2022

Uygulama Dersi 1

Tanım 1. $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$
 $t \rightarrow \gamma(t) = u(t) + iv(t)$ şeklinde tanımlanan sürekli γ fonksiyonuna \mathbb{C} düzleminde bir **eğri** denir.
(γ bir eğri $\iff x$ ve y fonksiyonları $[a, b]$ de sürekli)

Tanım 2. $[a, b]$ üzerinde $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ kuralı ile bir eğri verilsin.

- $\gamma(a) = \gamma(b)$ oluyorsa γ eğrisine **kapalı eğri** denir.
- $\forall t_1, t_2 \in [a, b]$ için $t_1 \neq t_2$ iken $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$ oluyorsa γ eğrisine **basit eğri** denir.
- $\forall t \in (a, b)$ için $\gamma'(t) = x'(t) + iy'(t)$ türevi mevcut ve sürekli ise γ eğrisine **türevlenebilirdir** denir.
- γ türevlenebilir ve her $t \in (a, b)$ için $\gamma'(t) \neq 0$ ise γ eğrisine $t \in [a, b]$ için **regülerdir** (düzgündür) denir.
- $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(a + b - t) = x(a + b - t) + iy(a + b - t)$, $a \leq t \leq b$ şeklinde tanımlanmış $\tilde{\gamma}$ eğrisine, γ **eğrisinin ters yönde yönlendirilmiş hali** denir.

Özellikler 1.

1.

$$\int_{\gamma} [\alpha f(z) \mp \beta g(z)] dz = \alpha \int_{\gamma} f(z) dz \mp \beta \int_{\gamma} g(z) dz$$

2.

$$\int_{\gamma} f(z) dz = - \int_{-\gamma} f(z) dz$$

3. γ parçalı düzgün eğri olmak üzere,

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz + \dots + \int_{\gamma_k} f(z) dz$$

4. $\gamma(t) = z(t) = x(t) + iy(t)$, $dz = d(\gamma(t)) = \gamma'(t)dt$, $a \leq t \leq b$ olmak üzere

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt$$

5. $h: \begin{array}{l} \gamma \rightarrow \mathbb{C} \\ t \rightarrow h(t) = u(t) + iv(t) \end{array}$ olsun.

$$\int_{\gamma} h(t) dt = \int_{\gamma} (u(t) + iv(t)) dt = \int_{\gamma} u(t) dt + i \int_{\gamma} v(t) dt$$

Kompleks integrallerin hesaplanması

1. $f: \begin{array}{l} [a, b] \rightarrow \mathbb{C} \\ t \rightarrow f(t) = u(t) + iv(t) \end{array}$ verilsin.

$$I = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b u(t) dt + i \int_a^b v(t) dt$$

- 2.

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_{\gamma} [u(x, y) + iv(x, y)](dx + idy) \\ &= \int_{\gamma} u(x, y) dx - v(x, y) dy + i \int_{\gamma} v(x, y) dx + u(x, y) dy \\ &= \int_a^b [u(x(t), y(t))x'(t) - v(x(t), y(t))y'(t)] dt + i \int_a^b [v(x(t), y(t))x'(t) + u(x(t), y(t))y'(t)] dt \end{aligned}$$

3. f bir $D \subset \mathbb{C}$ alt bölgesinde analitik, $\gamma \subset D$ regüler bir eğri, $z_1 = \gamma(a)$, $z_2 = \gamma(b)$ olsun. Ayrıca $F'(z) = f(z)$ olsun.

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{z_1}^{z_2} f(z) dz = F(z_2) - F(z_1)$$

dir.

Teorem 1 (Cauchy-Goursat Teoremi). γ basit kapalı eğri ve f analitik ise

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0 \text{ 'dir.}$$

Sorular

1. $\int_{\gamma} f(z) d\bar{z} = \overline{\int_{\gamma} f(z) dz}$ olduğunu gösteriniz.
2. $\gamma : z(t) = t + it^2, 0 \leq t \leq 1$ eğrisi üzerinden $f(z) = 3z$ kuralı ile verilen f fonksiyonunun integralini hesaplayınız.

3. a.

$$\int_{\gamma} f dx = \frac{1}{2} \left(\int_{\gamma} f dz + \int_{\gamma} f d\bar{z} \right)$$

b.

$$i \int_{\gamma} f dy = \frac{1}{2} \left(\int_{\gamma} f dz - \int_{\gamma} f d\bar{z} \right)$$

eşitliklerini gösteriniz.

4. $\gamma : z(t) = \begin{cases} \sin t, & 0 \leq t \leq \pi/2 \\ \sin t + i \cos t, & \pi/2 \leq t \leq \pi \end{cases}$ olmak üzere

$$\int_0^{\pi} e^z dz$$

integralini hesaplayınız.

5. $\gamma : z(t) = 3t + 2it, -2 \leq t \leq 2$ için

$$\int_{\gamma} z^2 dz$$

integralini hesaplayınız.

6. $\gamma = z(t) = 2 \cos t + 2i \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi$ olmak üzere

$$\int_{\gamma} (z^2 + 3z^3 + e^z + \ln z) dz$$

integralini hesaplayınız.

7. γ , $(1, 0)$ noktasını $(0, 1)$ noktasına birleştiren doğru parçası olmak üzere

$$\int_{\gamma} x dz$$

integralini hesaplayınız.

8. $\gamma(t) = z_0 + re^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi$ eğrisi verilsin. n bir tam sayı olmak üzere

$$\int_{\gamma} (z - z_0)^n dz = \begin{cases} 0, & n \neq -1 \\ 2\pi i, & n = -1 \end{cases}$$

olduğunu gösteriniz.