Fonksiyonel Analiz II Uygulama Notları

Metin Turgay

02.03.2022

Uygulama Dersi 1

Tanım 1. *X, $\mathbb{F}(\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C})$ üzerinde bir vektör uzayı olsun. X üzerinde bir **norm** aşağıdaki özellikleri sağlayan bir*

$$\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$$

fonksiyonudur: Her $x, y \in X$ ve her $\alpha \in \mathbb{F}$ için

1. $\|x\| \geq 0$;
2. $\|x\| = 0$ *ancak ve ancak* $x = 0$;
3. $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$;
4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

*Üzerinde bir $\|\cdot\|$ normu tanımlanmış olan bir X vektör uzayına **normlu uzay** adı verilir ve $(X, \|\cdot\|)$ ile gösterilir.*

X bir normlu uzay ise $\|x\| = 1$ özelliğini sağlayan $x \in X$ vektörüne birim vektör adı verilir.

Önerme 1. *$(X, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay olsun.*

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

ile tanımlı $d : X \times X : \mathbb{R}$ fonksiyonu X üzerinde bir metrik tanımlar.

Sonuç 1. *Her normlu uzay bir metrik uzaydır.*

Notasyon. *Eğer $(X, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay ve $d, d(x, y) = \|x - y\|$ ile tanımlı metrik ise o zaman d ye $\|\cdot\|$ **normu tarafından indirgenen metrik** adı verilir.*

Not. *Önerme 1 ile her normlu uzayın bir metrik uzay olduğunu söylemiş olduk. Fakat, her metrik uzay bir normlu uzay olmak zorunda değildir. Örneğin, herhangi bir (X, d) metrik uzayı için X bir vektör uzayı değilse normlu uzay olamaz. X vektör uzayı olsa bile (X, d) ayrık metrik uzayı normlu uzay değildir. Metrik uzayların normlu uzay belirtebilmesi için sağlaması gereken şartlar mevcuttur.*

Teorem 1. X bir vektör uzayı ve d, X üzerinde aşağıdaki şartları sağlayan bir metrik olsun.

1. $\forall x, y \in X$ ve her $\lambda \in K$ için
$$d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda|\, d(x, y).$$

2. $\forall x, \in X$ için
$$d(x + y, z + y) = d(x, z).$$

Bu durumda, θ, X vektör uzayının sıfır vektörü olmak üzere

$$\begin{array}{llll} \|\cdot\| : & X & \to & \mathbb{R} \\ & x & \to & \|x\| & = d(x, \theta) \end{array}$$

biçiminde tanımlı fonksiyon bir norm belirtir.

Tanım 2. *$(X, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay olsun. Herhangi $x \in X$ noktası ve herhangi $r > 0$ sayısı için*
$$B_r(x) = \{y \in X : \|x - y\| < r\}$$
kümesine x merkezli r yarıçaplı ***açık yuvar***
$$\overline{B}_r(x) = \{y \in X : \|x - y\| \leq r\}$$
kümesine x merkezli r yarıçaplı ***kapalı yuvar*** *ve*
$$S_r(x) = \{y \in X : \|x - y\| = r\}$$
kümesine x merkezli r yarıçaplı ***yuvar yüzeyi*** *denir.*

Tanım 3. *$(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayında bir $\{x_n\}$ dizisi olsun.*

a. *$x \in X$ olmak üzere her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık her $n \geq N$ için*
$$\|x - x_n\| < \varepsilon$$
olacak biçimde bir $N \in \mathbb{N}$ varsa $\{x_n\}$ dizisi $x \in X$ e ***yakınsar*** *denir. Bu durumda*
$$\lim_{n \to \infty} x_n = x$$
yazılır.

b. *Her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık gelen her $m, n \geq N$ için*
$$\|x_m - x_n\| < \varepsilon$$
olacak biçimde bir $N \in \mathbb{N}$ varsa $\{x_n\}$ dizisine bir ***Cauchy dizisi*** *denir.*

c *$\forall n \in \mathbb{N}$ için $\|x_n\| < M$ olacak şekilde bir $M > 0$ sayısı varsa $\{x_n\}$ sınırlıdır denir.*

d. *$(X, \|\cdot\|)$ uzayındaki her Cauchy dizisi bu uzayın bir elemanına yakınsıyorsa bu uzaya normlu tam uzay veya Banach uzayı denir.*

Teorem 2. $(X, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay, $A \subseteq X$ ve $x \in X$ olsun. $x \in \overline{A} \iff \{x_n\} \to x$ olacak şekilde bir $\{x_n\}$ dizisi vardır.

Teorem 3. $(X, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay ve $A \subseteq X$ olsun. Bu durumda aşağıdaki önermeler denktir.

i. A kompakttır.

ii. A dizisel kompakttır.

Teorem 4. $(X, \|\cdot\|)$ bir Banach uzayı, $Y \subseteq X$ alt vektör uzayı olsun. $(Y, \|\cdot\|)$ nin bir Banach uzayı olması için gerek ve yeter şart Y nin X de kapalı olmasıdır.

Tanım 4. *X ve Y, K cismi üzerinde iki vektör uzayı ve $T : X \to Y$ bir fonksiyon olsun. Eğer $\forall x, y \in X$ ve $\alpha, \beta \in K$ için*

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$$

oluyorsa, T ye lineer dönüşüm denir.

Tanım 5. *$(X, \|\cdot\|_1)$ ve $(Y, \|\cdot\|_2)$ iki normlu uzay, $T : X \to Y$ bir lineer dönüşüm olsun. Eğer $\forall x \in X$ için*

$$\|Tx\|_2 = \|x\|_1$$

oluyorsa T ye lineer izometri denir.

Bir lineer izometri aynı zamanda örten ise buna lineer izometrik izomorfi denir.

Teorem 5. Her normlu uzayın bir tamlanışı vardır ve bu tamlama lineer izometrik izomorfi yardımıyla tektir.

Teorem 6. $\{x_n\}$, bir $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayında yakınsak bir dizi olsun. O zaman

a. $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ bir tektir (yani dizinin limiti vardır)

b. $\{x_n\}$ nin herhangi bir altdizisi de x e yakınsar.

Tanım 6. *Bir X vektör uzayı üzerinde $\|\cdot\|$ ve $\|\cdot\|'$ normları tanımlı olsun. Eğer her $x \in X$ için*

$$m\|x\| \le \|x\|' \le M\|x\|$$

olacak biçimde $m, M > 0$ sayıları varsa $\|\cdot\|'$ normu $\|\cdot\|$ normuna (Lipschitz) denktir denir.

Önerme 2. *X bir vektör uzayı ve $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_3$, X üzerinde 3 norm olsun. $\|\cdot\|_2, \|\cdot\|_1$ e denk ve $\|\cdot\|_3, \|\cdot\|_2$ ye denk olsun. O zaman*

a. $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ ye denktir;

b. $\|\cdot\|_3, \|\cdot\|_1$ e denktir.

Önerme 3. *X bir vektör uzayı ve $\|\cdot\|$ ve $\|\cdot\|_1$ X üzerinde denk iki norm olsun. d ve d_1 metrikleri $d(x,y) = \|x-y\|$ ve $d_1(x,y) = \|x-y\|_1$ ile tanımlı metrikler olsun. $\{x_n\}, X$ içinde bir dizi olsun.*

a. $\{x_n\}$, (X,d) metrik uzayı içinde x e yakınsar ancak ve ancak $\{x_n\}$, (X,d_1) metrik uzayı içinde x e yakınsar;

b. $\{x_n\}$, (X,d) metrik uzayı içinde bir Cauchy dizisidir ancak ve ancak $\{x_n\}$, (X,d_1) metrik uzayı içinde bir Cauchy dizisidir;

c. (X,d) tamdır ancak ve ancak (X,d_1) tamdır.

Tanım 7. *$(X,\|\cdot\|_X)$ ve $(Y,\|\cdot\|_Y)$ iki normlu uzay ve $f : X \to Y$ bir fonksiyon olsun.*

a. $x \in X$ olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık, her $y \in X$ için

$$\|x-y\|_X < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\|_Y < \varepsilon$$

olacak biçimde bir $\delta > 0$ sayısı varsa f fonksiyonu x noktasında süreklidir denir.

b. Eğer f fonksiyonu X in her noktasında sürekli ise f X üzerinde süreklidir denir.

c. Eğer her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık, her $x, y \in X$ için

$$\|x-y\|_X < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\|_Y < \varepsilon$$

olacak biçimde bir $\delta > 0$ sayısı varsa f ye düzgün süreklidir denir.

Sorular

1. $a, b > 0$ ve $X = \mathbb{R}^2$ olsun.

$$\begin{array}{rccll} \|\cdot\|: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} & \\ & x & \to & \|x\| & = a|x_1| + b|x_2| \end{array}$$

fonksiyonunun $\mathbb{R}^2$ üzerinde norm olup olmadığını inceleyiniz.

2. X ve Y, K cismi üzerinde vektör uzayları olsun ve $\|\cdot\|_X$, X üzerinde bir norm ve $\|\cdot\|_Y$, Y üzerinde bir norm olsun. X ve Y nin kartezyen çarpımı

$$X \times Y = \{z = (x, y) : x \in X, y \in Y\}$$

olsun. O zaman

$$\|(x, y)\| = \max(\|x\|_X, \|y\|_Y)$$

fonksiyonunun $X \times Y$ üzerinde bir norm tanımladığını gösteriniz.

3. $C([a, b])$, $\mathbb{R}$ üzerinde bir vektör uzayıdır.

$$\begin{array}{rccll} \|\cdot\|: & C([a,b]) & \to & \mathbb{R} & \\ & f & \to & \|f\| & = \int\limits_a^b |f(x)| dx \end{array}$$

bir norm belirtir. Gösteriniz.

4. $C([a, b])$ üzerinde

$$\begin{array}{rccll} \|\cdot\|_\infty: & C([a,b]) & \to & \mathbb{R} & \\ & f & \to & \|f\|_\infty & = \sup\limits_{x \in [a,b]} |f(x)| \end{array}$$

fonksiyonu bir norm belirtir. Gösteriniz.

5. $L^p([a, b]) = \{f : \int_a^b |f(x)|^p dx < +\infty\}$ uzayı

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

kuralı ile verilen $\|\cdot\|_p$ fonksiyonu ile bir normlu uzaydır. $L^2([0, 1])$ üzerinde $f_n(x) = x^{1/n}$ kuralı ile verilmiş $\{f_n\}$ fonksiyon dizisi Cauchy dizisi midir?

6. $C([a,b])$ uzayı $\|\cdot\|_\infty$ normuna göre tam normlu uzay iken $\|\cdot\|_1$ normuna göre tam normlu uzay değildir. Gösteriniz.