Analiz IV Uygulama Notları

Metin Turgay

23.02.2022

Uygulama Dersi 1

Bu kesimde, önce

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n \text{ tane}} = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) : x_1, x_2, \cdots, x_n \in \mathbb{R}\}$$

kümesinin bazı alt kümelerinin topolojik özelliklerini inceleyeceğiz. Bu özelliklerin birçoğu uzaklık kavramına dayandığından, önce $\mathbb{R}^n$ de iki nokta arasındaki uzaklık kavramını hatırlatalım.

Bilindiği gibi, $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ ve $y = (y_1, y_2, \cdots y_n)$ noktaları arasındaki uzaklık (Öklid uzaklığı)

$$d(x, y) = \left[\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2\right]^{1/2}$$

reel sayısıdır.

Tanım 1. *$a = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$, $\mathbb{R}^n$ de bir sabit nokta ve $\varepsilon > 0$ olsun.*

$$D(a, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, a) < \varepsilon\}$$

*kümesine **a noktasının ε-komşuluğu** veya **a merkezli ε yarıçaplı açık yuvar** adı verilir.*

Tanım 2. *$a = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$, $\mathbb{R}^n$ de bir sabit nokta ve $\varepsilon > 0$ olsun. $D(a, \varepsilon) \backslash \{a\}$ kümesine a **nın delinmiş komşuluğu** denir.*

Tanım 3. *$a \in \mathbb{R}^n$ ve $\varepsilon > 0$ olsun.*

$$D(a, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(a, x) \leq \varepsilon\}$$

*kümesine **a merkezli ε yarıçaplı kapalı yuvar** adı verilir.*

Tanım 4. *$A \subset \mathbb{R}^n$ ve $a \in A$ olsun. Eğer $D(a, \varepsilon) \subset A$ olacak şekilde bir $\varepsilon > 0$ sayısı varsa, a noktası A kümesinin bir **iç noktası**dır denir. A kümesinin iç noktalarının kümesine A nın içi denir, A° ile gösterilir.*

Tanım 5. *Tüm elemanları iç noktalardan oluşan kümeye, yani, $A^\circ = A$ şeklindeki A kümeye $\mathbb{R}^n$ de bir **açık küme**dir denir.*

Tanım 6. *$A \subset \mathbb{R}^n$ olsun. A kümesinin en az bir noktasının komşuluğunda A ya ait olmayan noktalar varsa A ya **kapalı küme** denir. Ayrıca bu tanım şu şekilde de ifade edebilebilir:*

$K \subset \mathbb{R}^n$ olsun. K kümesinin tümleyeni açık ise K kümesi kapalıdır. Yani, K kapalıdır $\iff$ $K^t = \mathbb{R}^n \backslash K$ açıktır.

Tanım 7. *$A \subset \mathbb{R}^n$ ve $a \in \mathbb{R}^n$ olsun. Eğer a nın herbir komşuluğunda, A kümesinin a dan farklı en az bir elemanı varsa a ya A nın bir **yığılma noktası**dır denir. A nın yığılma noktalarının kümesi A' ile gösterilir.*

Tanım 8. *A kümesine ait olup yığılma noktası olmayan elemanlara A nın **izole noktaları** adı verilir.*

Tanım 9. *$A \subset \mathbb{R}^n$ olsun. A kümesini kapsayan kapalı kümelerin kesişimine A **nın kapanışı** denir, $\bar{A}$ ile gösterilir.*

Tanım 10. *$E \subset \mathbb{R}^n$ ve $a \in \mathbb{R}^n$ olsun. a noktasının E kümesine olan uzaklığı $d(a, E) = \inf\{d(a, x) : x \in E\}$ reel sayısıdır. $E, F \subset \mathbb{R}^n$ kümeleri arasındaki uzaklık*

$$d(E, F) = \inf\{d(x, y) : x \in E \text{ ve } y \in F\}$$

reel sayısıdır. $A \subset \mathbb{R}^n$ kümesinin çapı

$$d(A) = \sup\{d(x, y) : x, y \in A\}$$

sayısıdır.

Tanım 11. *Çapı sonlu olan kümeye sınırlı küme denir.*

Tanım 12. *$A \subset \mathbb{R}^n$ olsun. $\bar{A}$ da olmayan elemanların kümesine A **nın dışı** denir, dış(A) ile gösterilir.*

Tanım 13. $\mathbf{A} \subset \mathbb{R}^\mathbf{n}$ ***olsun***. *A kompaktır $\Leftrightarrow$ A kapalı ve sınırlıdır.*

Tanım 14. *$A \subset \mathbb{R}^n$ ve $a \in \mathbb{R}^n$ olsun. Eğer a nın herbir komşuluğunda hem A nın hem de A^t nin elemanı varsa a noktası A kümesinin bir **sınır noktası**dır denir. A kümesinin sınır noktalarının kümesine A nın sınırı denir. A^s veya ∂A ile gösterilir.*

Tanım 15. *$A, B \subset \mathbb{R}^n$ olsun. A ile B **bitişik kümeler**dir $\Leftrightarrow$ $\bar{A} \cap B \neq \phi$ veya $A \cap \bar{B} \neq \phi$ dir. A ile B **ayrılmış kümeler**dir $\Leftrightarrow$ A ile B bitişik değildir.*

Tanım 16. *$C \subset \mathbb{R}^n$ olsun. C **bağlantılıdır** (irtibatlıdır) $\Leftrightarrow$ $A \cup B = C$ olacak şekilde bos olmayan, bitişik A ve B kümeleri vardır.*

Tanım 17. *$S \subset \mathbb{R}^n$ kümesi verilsin. Her $x \in S$ için başlangıç ve bitiş noktaları x olan ve tamamen S nin içinde bulunan her kapalı eğrinin sınırladığı küme S tarafından kapsanıyorsa S ye $\mathbb{R}^n$ de **basit irtibatlı**dır denir.*

Tanım 18. *Açık ve irtibatlı bir kümeye **bölge** denir.*

Tanım 19. *$S \subset \mathbb{R}^n$ olmak üzere her $x, y \in S$ için $0 < \lambda < 1$ olmak üzere $\lambda x + (1-y)y \in S$ ise S ye* ***konveks küme*** *denir. Yani, S ye ait olan tüm noktalar ikişer ikişer doğru parçaları ile birleştirildiğinde bu doğru parçalarının tamamı S tarafından kapsanıyorsa S ye konveks küme denir.*

Tanım 20. *Tanım kümesi $\mathbb{R}^n$ kümesinin bir alt kümesi olan fonksiyonlara bir n-değişkenli fonksiyon adı verilir. Eğer değer kümesi $\mathbb{R}$ ise fonksiyona n-değişkenli reel değerli fonksiyon denir.*

Tanım 21. *$A \subset \mathbf{R}^2, (a,b), A$ kümesinin bir* ***yığılma noktası*** *ve f de A üzerinde tanımlı, reel değerli bir fonksiyon olsun.*

f ***fonksiyonunun*** *(a,b)* ***noktasındaki limiti*** *L dir $\Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0$ için $\exists\delta > 0$ öyleki A kümesinin (a,b) noktasının δ-komşuluğunda bulunan tüm (x,y) noktaları için $f(x,y)$ değerleri L nin ε-komşuluğunda bulunur. f fonksiyonunun (a,b) noktasındaki limiti L ise bu*

$$\lim_{(x,y)-(a,b)} f(x,y) = L$$

biçiminde gösterilir.

(a,b) noktasının δ-komşuluğunda bulunan (x,y) noktaları için

$$0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta$$

bağıntısı sağlanacağından yukarıdaki tanım kısaca, şu şekilde ifade edilebilir:
$\lim\limits_{(x,y)-(a,b)} f(x,y) = L \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0$ için $\exists\delta > 0$ öyleki

$$0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta$$

şartını sağlayan herbir $(x,y) \in A$ için $|f(x,y) - L| < \varepsilon$ dur.

$$|x-a| = \sqrt{(x-a)^2} \leq \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$$

ve

$$|y-b| = \sqrt{(y-b)^2} \leq \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$$

olduğundan $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta$ bağıntısını sağlayan her (x,y) noktası için

$$|x-a| < \delta \text{ ve } |y-b| < \delta$$

olur. Buradan çıkan sonuç (x,y) noktası (a,b) ye yeter derece yakın olduğunda x in a ya, y nin b ye yeter derece yakın olacağıdır.

Sonuç 1. *$\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0$ için $\exists\delta > 0$ öyleki $0 < |x-a| < \delta$ ve $0 < |y-b| < \delta$ bağıntısını sağlayan, tanım kümesindeki tüm (x,y) noktaları için $|f(x,y) - L| < \varepsilon$.*

Sorular

1. $E = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\} \setminus ([0,1] \times \{0\})$ kümesinin iç, dış, sınır, kapanış ve yığılma noktalarını bulunuz.

2. $\mathbb{R}^n$ de herhangi iki A ve B kümeleri için $(A^\circ \cup B^\circ) = (A \cup B)^\circ$ eşitliğinin doğru olup olmadığını gösteriniz.

3. $A = [a, b)$ ve $B = \mathbb{Q}$ kümelerinin yığılma noktalarını bulunuz.

4. $A = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ kümesinin iç, dış, kapanış, sınır, izole ve yığılma noktalarını bulunuz.

5. Aşağıda kuralları verilmiş fonksiyonların tanım kümelerini bulunuz.

   a. $f(x, y, z) = \dfrac{3x - 4y + 2z}{\sqrt{9 - x^2 - y^2 - z^2}}$

   b. $g(x, y, t) = \dfrac{\sqrt{2t - 4}}{x^2 - y^2}$

6. Aşağıda kuralları verilmiş fonksiyonların $(0, 0)$ noktasındaki limitlerini araştırınız.

   a. $f(x, y) = \dfrac{x - y + x^2 + y^2}{x + y}$

   b. $h(x, y) = x \sin \dfrac{1}{y}$

7. Aşağıdaki eşitliklerin doğru olduğunu gösteriniz.

   a.
   $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2 - y^2 + 5}{x^2 + y^2 + 2} = \frac{5}{2}$$

   b.
   $$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{\sin xy}{y} = 0$$

8. $f, g : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ fonksiyonları ve $(a, b) \in A'$ noktası verilsin. $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = L_1$ ve $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} g(x, y) = L_2$ limitleri mevcut olsun. Bu durumda, aşağıdaki limitler mevcuttur.

   a. $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) + g(x, y) = L_1 + L_2$

   b. $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y)g(x, y) = L_1 \cdot L_2$

   c. her $c \in \mathbb{R}$ için $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} c \cdot f(x, y) = c \cdot L_1$

   d. $g(x, y) \neq 0$ ve $L_2 \neq 0$ ise $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} \dfrac{f(x, y)}{g(x, y)} = \dfrac{L_1}{L_2}$