Analiz II Uygulama Notları

Metin Turgay

March 2, 2023

Bu materyalde uygulama dersinde çözülecek olan sorular için gerekli temel kavramlar hatırlatılarak çözülmüş/çözülmemiş sorular çözümsüz olarak verilecektir.

Bu belgede fazlaca yazım hatası bulunmaktadır. Her okuduğunuzu dikkatle takip etmelisiniz. Bulduğunuz yazım hatalarını düzeltilemesi için

metin.turgay@selcuk.edu.tr

üzerinden bana iletebilirsiniz.

Bölüm 1

Uygulama Dersi 1

Tanım 1. $[a,b](a,b \in \mathbb{R})$ *aralığının* $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ *kosulunu sağlayan her,*

$$P = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$$

sonlu alt kümesine $[a,b]$ *aralığının bir parçalanması (veya bölüntüsü);* $[x_{k-1}, x_k]\left((x_{k-1}, x_k)\right), k = 1, \cdots, n$ *aralıklarına* $[a,b]$*'nin* P *parçalanmasına karşılık gelen kapalı (açık) alt aralıkları adı verilir.* $\triangle x_k = x_k - x_{k-1} > 0$ *sayısına* $[x_{k-1}, x_k]\left((x_{k-1}, x_k)\right)$ *aralığının boyu (veya ölçüsü) denir.* $\triangle x_1, \cdots, \triangle x_n$ *sayılarınn en büyüğüne* P *parçalanmasının normu (veya maksimal capı) denir ve* $\|P\|$ *ile gösterilir. Şu halde* $\|P\| = \max\{\triangle x_k : k = 1, \cdots, n\}$ *dır. Eğer,* $\triangle x_1 = \triangle x_2 = \cdots = \Delta x_n$*, yani* $\Delta x_k = \frac{b-a}{n}, k = 1, \cdots, n_1$ *ise,* P *ye* $[a,b]$ *nin düzgün parçalanmasi adı verilir.*

İleride $a_1, a_2, \cdots, a_n$ *sayılarının toplamını, kısaca* $\sum_{k=1}^{n} a_k$ *sembolü ile göstereceğiz. Buna göre,*

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

olacaktır.

Tanım 2. $[a,b] \subset \mathbb{R}$ *ve* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *fonksiyonu sınırlı olsun.* $[a,b]$ *nin* $P = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ *parçalanması icin*

$$\begin{aligned} m_k(f) &= m\left(f, [x_{k-1}, x_k]\right) = \inf\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}, \\ M_k(f) &= M\left(f, [x_{k-1}, x_k]\right) = \sup\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\} \end{aligned}$$

$k = 1, \cdots, n$ *olsun.*

$$A(f,P) = \sum_{k=1}^{n} m_k(f) \triangle x_k \quad \text{ve } \ddot{U}(f,P) = \sum_{k=1}^{n} M_k(f) \triangle x_k$$

toplamlarına sırası ile, f *fonksiyonunun* $[a,b]$ *nin* P *parçalanmasına göre alt Darboux toplamı ve üst Darboux toplamı adı verilir.* $\xi_k, [x_{k-1}, x_k]$ *alt aralığından* *alınan herhangi bir nokta olmak üzere*

$$R(f,P)=\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\triangle x_k$$

toplamına f fonksiyonunun $[a,b]$ nin P parçalanmasına göre Riemann toplam (veya Riemann integral toplamı) adı verilir. $(\xi_1,\cdots,\xi_n)$ sıralı n lisini bir ξ sembolü ile göstereceğiz.

Not. *Sınırlı $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu sabit tutulduğunda $A(f,P)$ ve $U(f,P)$ Darboux toplamları yalnızca $[a,b]$'nin P parçalanmasına, $R(f,P)$ Riemann toplamı ise hem P parçalanmasının hem de $\xi_k\in[x_{k-1},x_k](k=1,...,n)$ olmak üzere $\xi=(\xi_1,...\xi_n)$ n-lisinin seçilişine bağlıdır. Buna göre, $R(f,P)$ toplamı çoğu kez $R(f,P,\xi)$ ile gösterilir.*

Eğer, $[a,b]$ nin bir $P=\{x_0,x_1,\cdots,x_n\}$ parçalanması ve her bir $[x_{k-1},x_k]$ aralığında herhangi bir ξ_k noktası seçilmişse $[a,b]$ nin bir işaretlenmiş (P,ξ) parçalanması verilmiştir diyeceğiz.

Sınırlı bir $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu ve $[a,b]$ 'nin herhangi işaretlenmiş bir (P,ξ) parçalanması verilsin. Her $\xi_k\in[x_{k-1},x_k]$ için $m_k(f)\le f(\xi_k)\le M_k(f), k=1,\cdots,n$ olduğundan

$$A(f,P)\le R(f,P,\xi)\le U(f,P) \tag{1.1}$$

olacağı açıktır.

Tanım 3. *$[a,b]\subset\mathbb{R}$ üzerinde sınırlı $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu için $[a,b]$ nin P parçalanması ve ξ ye bağımlı olmayarak,*

$$\lim_{\|P\|\to 0} R(f,P,\xi)=\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\triangle x_k=I \tag{1.2}$$

sonlu limiti varsa bu limite f nin $[a,b]$ üzerinde Riemann (veya Belirli) integrali denir ve $\int_a^b f(x)dx$ ile gösterilir. Bu durumda $f,[a,b]$ üzerinde integrallenebilirdir (Riemann anlamında) denir. a ve b sayılarına integralin sırası ile alt ve üst sınırları denir. (1.2) esitliği şu anlamdadır. $\lim_{\|P\|\to 0} R(f,P,\xi)=I \iff \forall\epsilon>0$ için $\exists\delta>0$ öyleki, $[a,b]$ nin $\|P\|<\delta$ olacak sekilde herbir işaretlenmiş (P,ξ) parçalanması için $|R(f,P,\xi)-I|<\epsilon$ olur.

Tanım 4. *$[a,b]$ aralığının $a=x_0^{(m)}<x_1^{(m)}<\cdots<x_{n_m-1}^{(m)}<x_{n_m}^{(m)}=b$ kosulunu sağlayan $P_m=\left\{x_0^{(m)},x_1^{(m)},\cdots,x_{n_m}^{(m)}\right\}, m=1,2,\cdots$ parçalanmaları ve $\xi_k^{(m)}\in\left[x_{k-1}^{(m)},x_k^{(m)}\right],\xi^{(m)}=\left(\xi_1^{(m)},\ldots,\xi_{n_m}^{(m)}\right),\triangle x_k^{(m)}=x_k^{(m)}-x_{k-1}^{(m)}$, $\|P_m\|=\max\left\{\Delta x_k^{(m)}:k=1,\cdots,n\right\}$ olmak üzere $\lim_{m\to\infty}\|P_m\|=0$ olsun. Bu durumda,*

$$\lim_{m\to\infty} R\left(f,P_m,\xi^{(m)}\right)=I$$

sonlu limiti varsa,bu limite f 'nin $[a,b]$ üzerinde Riemann integrali denir.

Tanım 3 ve Tanım 4 tanımlarının denk olduğu ispatlanabilir.

Teorem 1.1. $[a,b]$ üzerinde Riemann anlamında integrallenebilen her fonksiyon bu aralık üzerinde sınırlıdır.

Not. *$[a,b] \subset \mathbb{R}$ üzerinde tanımlı $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun $[a,b]$ üzerinde integrallenebilir olması için f fonksiyonunun $[a,b]$ de sınırlı olması koşulu gereklidir, fakat yeterli değildir. Örneğin,*

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in [a,b] \quad \text{rasyonel ise,} \\ 0, & x \in [a,b] \quad \text{irrasyonel ise} \end{cases}$$

biçiminde tanımlı $D : [a,b] \to \{0,1\}$ fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde sınırlıdır fakat integrallenebilen değildir. Gerçekten, $[a,b]$ aralığının herhangi bir $P = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ parçalanması için $\overline{\xi}_k \in [x_{k-1}, x_k]$ rasyonel ve $\overline{\overline{\xi}}_k \in [x_{k-1}, x_k]$ irrasyonel sayılar olmak üzere

$$R(D,P,\overline{\xi}) = \sum_{k=1}^{n} D\left(\overline{\xi}_k\right) \Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} 1 \Delta x_k = b-a,$$
$$R(D,P,\overline{\overline{\xi}}) = \sum_{k=1}^{n} D\left(\overline{\overline{\xi}}_k\right) \Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} 0 \Delta x_k = 0$$

olduğundan, $b-a \neq 0$ durumunda $\lim_{\|P\| \to 0} R(D,P,\xi)$ limiti yoktur. Buna göre, verilen D fonksiyonu her $[a,b]$ aralığı üzerinde integrallenemezdir.

Teorem 1.2. P ve $P_0, [a,b]$ aralığının iki parçalanması ve $f \in B[a,b]$ olsun. Eğer, $P_0 \subset P$ ise

$$A(f,P_0) \leq A(f,P), \qquad \ddot{U}(f,P) \leq \ddot{U}(f,P_0)$$

dir.

Sonuç 1. *$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sınırlı bir fonksiyon ve $m(f) = \inf\{f(x) : x \in [a,b]\}$ ve $M(f) = \sup\{f(x) : x \in [a,b]\}$ olsun. Bu durumda $[a,b]$ aralığının her $P = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ parçalanması için*

$$m(f)(b-a) \leq A(f,P) \leq \ddot{U}(f,P) \leq M(f)(b-a) \tag{1.3}$$

dir. Gercekten, $\forall k = 1, \cdots, 2$ için $m_k(f) \geq m(f)$ ve $M_k(f) \leq M(f)$ olduğundan (çünkü $E \subset \mathbb{R}, F \subset \mathbb{R}$ ve $E \subset F \Rightarrow \inf F \leq \inf E, \sup E \leq \sup F$ dir)

$$A(f,P) = \sum_{k=1}^{n} m_k(f) \Delta x_k \geq \sum_{k=1}^{n} m(f) \Delta x_k = m(f)(b-a)$$
$$\tilde{U}(f,P) = \sum_{k=1}^{n} M_k(f) \Delta x_k \leq \sum_{k=1}^{n} M(f) \Delta x_k = M(f)(b-a)$$

yazılabilir ((1.1) ten dolayı $A(f,P) \leq \ddot{U}(f,P)$ olduğundan, (1.3) eșitliğinin doğruluğu anlaşılır.

Sonuç 2. *$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ sınırlı bir fonksiyon ve (P_n) de $[a,b]$ aralığının parçalanmalarının artan bir dizisi (yani, $\forall n\in\mathbb{N}$ için $P_n\subset P_{n+1}$) olsun. $(A(f,P_n))$ alt toplamlar dizisi azalmayan ve üstten sınırlı, $\left(\ddot{U}(f,P_n)\right)$ üst toplamlar dizisi artmayan ve alttan sınırlıdır.*

Gerçekten, $\forall n\in\mathbb{N}$ için $P_n\subset P_{n+1}$ olduğundan, Teorem 1.2 den dolayı $A(f,P_n)\le A(f,P_{n+1})$ ve $\ddot{U}(f,P_{n+1})\le \ddot{U}(f,P_n)$ yazılabilir. Buna göre ve Sonuç 1 e göre $(A(f,P_n))$ dizisi azalmayan ve üstten sınırı $\left(\ddot{U}(f,P_n)\right)$ dizisi ise artmayan ve alttan sınırlıdır.

Teorem 1.3. $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ sınırlı bir fonksiyon ve $P=\{x_0,x_1,\cdots,x_n$ $[a,b]$ nin herhangi bir parçalanması olsun. Bu durumda,

$$\ddot{U}(f,P)-A(f,P)=\sum_{k=1}^{n}\omega_k(f)\triangle x_k$$

dir. Burada,

$$\omega_k(f)=\omega(f,[x_{k-1},x_k])=\sup\{|f(x)-f(y)|:x,y\in[x_{k-1},x_k]\}$$

f fonksiyonunun $[x_{k-1},x_k]$ aralığı üzerindeki salınımıdır.

Tanım 5. *$f:f[a,b]\to\mathbb{R}$ sınırlı bir fonksiyon olsun. $\underline{I}=\sup\{A(f,P):P\in\mathcal{P}\}$ ve $\overline{I}=\inf\{\ddot{U}(f,P):P\in\mathcal{P}\}$ sayılarına f fonksiyonunun $[a,b]$ üzerindeki sırası ile alt integrali ve üst integrali denir.*

Teorem 1.4. $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ sınırlı bir fonksiyon olsun. Bu durumuda, $\underline{I}\le\overline{I}$'dır.

Not. *$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ sınırlı bir fonksiyon, (P_n) de $[a,b]$ aralığının $\lim_{n\to\infty}\|P_n\|=0$ olacak şekilde parçalanmalarının artan bir dizisi olsun. Sonuç 2 den dolayı $(A(f,P_n))$ alt toplamlar dizisi azalmayan ve üstten sınırlı, $(U(f,P_n))$ üst toplamlar dizisi artmayan ve alttan sınırlı olduğundan, monoton dizi özelliklerine göre bu dizilerin birer limitleri vardır. Bu nedenle sınırlı $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonunun $[a,b]$ üzerindeki alt ve üst integralleri sırası ile*

$$\underline{I}=\lim_{n\to\infty}A(f,P_n)=\sup\{A(f,P_n):n\in\mathbb{N}\}$$
$$\overline{I}=\lim_{n\to\infty}\ddot{U}(f,P_n)=\inf\left\{\ddot{U}(f,P_n):n\in\mathbb{N}\right\}$$

gibi tanımlanabilir.

Teorem 1.5. $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ sınırlı bir fonksiyon olsun. Aşağıdaki önermeler denktirler.

a. $\underline{I}=\overline{I}$

b. $\forall\epsilon>0$ için $[a,b]$ aralığının

$$\ddot{U}(f,P)-A(f,P)<\epsilon$$

olacak sekilde bir $P=P_\varepsilon$ parçalanması vardır.

c. $\lim_{\|P\|\to 0} R(f,P,\xi) = I = \int_a^b f(x)dx$ limiti vardır. Ayrıca $I = \underline{I} = \overline{I}$ dir.

Tanım 6. *Sınırlı bir $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun $[a,b]$ üzerinde integrallenebilmesi için gerek ve yeter koşul aşağıdaki koşullardan birinin sağlanmasıdır.*

a. $\underline{I} = \overline{I}$ (Darboux Kosulu)

b. $\forall \epsilon \in \mathbb{R}_+ icin$

$$\ddot{U}(f,P) - A(f,P) = \sum_{k=1}^{n} \omega_k(f) \triangle x_k < \epsilon$$

olacak sekilde bir $P \in \mathcal{P}$ parçalanması vardur (Riemann Koşulu)

Sonuç 3. *$P_n \in \mathcal{P}, P_n \subset P_{n+1} (n \in \mathbb{N})$ ve $\lim_{n\to\infty} \|P_n\| = 0$ koşullarını sağlayan bir (P_n) dizisi için $\left(P_n = \left\{ x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \cdots, x_n^{(n)} \right\}, \xi_k^n \in \left[x_{k-1}^{(n)}, x_k^{(n)} \right], \Delta x_k^{(n)} = x_k^{(n)} - x_{k-1}^{(n)}, k = 1, \cdots, n \right)$*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(\xi_k^{(n)}\right) \triangle x_k^{(n)} = I \tag{1.4}$$

limiti varsa

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

integrali vardır.

Not. *Sonuç 3'den görüldüğü gibi $\int_a^b f(x)dx$ integralinin varolması için $P_n \subset P_{n+1} (n \in \mathbb{N})$ ve $\lim_{n\to\infty} \|P_n\| = 0$ koşullarını sağlayan herhangi bir (P_n) dizisi için (1.4) limitinin varolduğunu göstermek yeterlidir. Örneğin, böyle bir (P_n) dizisi olarak terimleri $P_n = \left\{ x_k^{(n)} = a + \frac{b-n}{n} k : k = 0, 1, \cdots, n \right\}$ seklinde tanımlı (P_n) dizisi (yani $[a,b]$ nin düzgün parçalanmalarından oluşan dizi) alınabilir.*

Teorem 1.6. $[a,b]$ aralığında sürekli her fonksiyon bu aralık üzerinde integrallenebilirdir, yani $\mathcal{C}[a,b] \subset \mathcal{R}[a,b]$ dir.

Teorem 1.7. $[a,b]$ aralığında monoton (artan veya azalan) her fonksiyon bu aralık üzerinde integrallenebilirdir.

Teorem 1.8. $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$ olsun. Bu durumda,

a. $f + g \in \mathcal{R}[a,b]$.

b. $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ için $\alpha f \in \mathcal{R}[a,b]$.

c. $|f| \in \mathcal{R}[a,b]$.

d. $[c,d] \subset [a,b]$ ise $f|_{[c,d]} \in \mathcal{R}[c,d]$.

e. $fg \in \dot{\mathcal{R}}[a,b]$.

f. $\forall x \in [a,b]$ için $|g(x)| \geq \beta > 0$ ise $\frac{1}{g} \in \mathcal{R}[a,b]$ dir.

Tanım 7. *$f \in \mathcal{R}[a,b]$ için*

a. $\int_a^a f(x)dx = 0$

b. $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$ *dir.*

Teorem 1.9. (a) $f \in \mathcal{R}[a,b]$ ve $g \in \mathcal{R}[a,b]$ ise $f+g \in \mathcal{R}[a,b]$ ve $\forall a \in \mathbb{R}$ için $\alpha f \in \mathcal{R}[a,b]$ dir ve

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$
$$\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx$$

eşitlikleri doğrudur.

(b) $f \in \mathcal{R}[a,b]$ ve $a < c < b$ ise $f \in \mathcal{R}[a,c], f \in \mathcal{R}[c,b]$ dir ve

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

dir. Bu sonuca Riemann integralinin Toplamsallık Özelliği denir.

(c) $f \in \mathcal{R}[a,b]$ ve $\forall x \in [a,b]$ icin $f(x) \geq 0$ ise

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0$$

dir.

(d) $f \in \mathcal{R}[a,b]$ ve $\forall x \in [a,b]$ icin $f(x) > 0$ ise

$$\int_a^b f(x)dx > 0$$

dir.

(e) $f \in \mathcal{R}[a,b], g \in \mathcal{R}[a,b]$ ve $\forall x \in [a,b]$ icin $f(x) \leq g(x)$ (veya $f(x) < g(x)$) ise

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx \left(\int_a^b f(x)dx < \int_a^b g(x)dx\right)$$

dir.

(f) $f \in \mathcal{R}[a,b]$ ve $\forall x \in [a,b]$ icin $q \leq f(x) \leq p$ ise

$$q(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq p(b-a)$$

dir.

(g) $f \in \mathcal{R}[a,b]$ ise $|f| \in \mathcal{R}[a,b]$ dir ve

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

dir.

1.1 Sorular

1. $[a,b]$ aralğının aritmetik dizi teşkil eden $P = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ parçalanmasına göre $f(x) = e^x$ fonksiyonunun alt Darboux ve üst Darboux toplamlarını bulunuz ve $n \to \infty$ iken bu toplamların limitlerini hesaplaymnz.

2. $[a,b](0 < a < b)$ aralığının geometrik dizi teşkil eden $P = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ parçalanmasına göre $f(x) = \frac{1}{x}$ fonksiyonunun alt Darboux ve üst Darboux toplamlarını bulunuz ve $n \to \infty$ iken bu toplamların limitlerini hesaplayınız.

3. Belirli integralin tanımını kullanarak aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

   a. $\int_{-2}^{5}(3+4x)dx$

   b. $\int_a^b x^m dx, 0 < a < b, m \neq -1$

   c. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$

   d. $\int_0^{\pi} \ln\left(1 - 2\alpha\cos x + \alpha^2\right) dx, \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq \pm 1$

4. Belirli integraller yardımıyla aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

   a. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n}\right);$

   b. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n^2+1^2} + \frac{n}{n^2+2^2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n^2}\right);$

   c. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^p+1}, (p \geq 0)$