Analiz I Uygulama Notları

Metin Turgay

October 3, 2022

Bu materyalde uygulama dersinde çözülecek olan sorular için gerekli temel kavramlar hatırlatılarak çözülmüş/çözülmemiş sorular çözümsüz olarak verilecektir.

Bu belgede fazlaca yazım hatası bulunmaktadır. Her okuduğunuzu dikkatle takip etmelisiniz. Bulduğunuz yazım hatalarını düzeltilemesi için

metin.turgay@selcuk.edu.tr

üzerinden bana iletebilirsiniz.

Emeği geçenler
Abdülkadir Eke
Sadettin Kurşun
Dilek Özer
Metin Turgay

Bölüm 1

Uygulama Dersi 1-2

Kesin bir tanımı yapılamamakla beraber, sezgisel olarak, küme bazı özelliklere sahip nesnelerin sıralı olmayan bir topluluğu, bir sınıfı, bir kolleksiyonu olarak düşünülebilir.

Tanım 1. *Eğer bir A kümesinin her elemanı B kümesinin de bir elemanı ise A kümesi B nin bir alt kümesidir denir ve $A \subset B$ şeklinde gösterilir, yani*

$$A \subset B \iff [a \in A \Rightarrow a \in B]$$

Eğer A kümesi B kümesinin alt kümesi değilse bu $A \not\subset B$ şeklinde gösterilir.

Bu tanıma göre her A kümesi için $A \subset A$ olur.

Tanım 2. *A ve B kümelerinin eşitliği*

$$A = B \iff A \subset B \text{ ve } B \subset A$$

şeklinde tanımlanır. Eger A kümesinin en az bir elemanı B de değilse veya B nin en az bir elemanı A da degilse A ile B farklıdır denir, $A \neq B$ şeklinde gösterilir.

Bu tanıma göre A ve B eşit kümelerse aynı elemanlardan meydana gelmişlerdir. Eğer $A \subset B$ fakat $A \neq B$ ise A ya B nin bir öz alt kümesidir denir.

Tanım 3. *Hiç bir elemanı olmayan kümeye boş küme denir, $\emptyset$ sembolu ile gösterilir.*

Boş kümeyi $\emptyset = \{x : x \neq x\}$ şeklinde de tanımlamak mümkündür. $x \neq x$ hiçbir zaman gerçeklenemeyecek bir bağıntı olduğundan $\emptyset$ nin hiç elemanı yoktur.

Teorem 1.1. Boş küme her kümenin alt kumesidir.

Tanım 4. *Küme teorisinin herhangi bir uygulamasında uğraştığımız tüm kümeleri sabit bir kümenin alt kümeleri olarak düşünebiliriz. Bu kümeye evrensel küme denir ve E ile gösterilir.*

Tanım 5. *A ve B kümelerinin elemanlarından meydana gelen kümeye A ile B nin birleşimi denir, $A \cup B$ ile gösterilir. Buna göre*

$$A \cup B = \{x : x \in A \textit{ veya } x \in B\}$$

dir.

Tanım 6. *A ve B kümelerinin ortak elemanlarından meydana gelen kümeye A ile B kümelerinin arakesiti veya kesişimi denir, $A \cap B$ ile gösterilir:*

$$A \cap B = \{x : x \in A \textit{ ve } x \in B\}$$

Tanım 7. *$A \cap B = \emptyset$ ise A ile B kümeleri ayrıktır denir.*

Tanım 8. *A kümesinde olup da B de bulunmayan elemanların kümesine B nin A kümesine göre tümleyeni denir. $A \backslash B$ ile gösterilir.*

Tanım 9. *Bir A kumesinin E, evrensel kümesine göre tümleyenine A kümesinin tümleyenidenir, A' ile gösterilir. Buna göre*

$$A' = \{x : x \notin A\}$$

dir.

Tanım 10. *A ve B herhangi iki küme olsun.*

a) $(A \cup B)' = A' \cap B'$

b) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

dır.

Tanım 11. *A ve B kümelerinin simetrik farkı, kümelerden birine ait olup da diğerine ait olmayan elemanların kümesidir. Buna göre;*

$$A \triangle B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$$

dir.

Tanım 12. *A ve B kümelerinin kartezyen çarpımı, $a \in A$ ve $b \in B$ olmak üzere tüm sıralı (a, b) ikililerinin kümesidir. Buna göre,*

$$A \times B = ((a, b) : a \in A \textit{ ve } b \in B)$$

olur,

Tanım 13. $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ..., n, ...\}$ *kümesine doğal sayılar kümesi, bu kümenin elemanları olan* $1, 2, 3, ...$ *sayılarına da doğal sayılar denir.*

Tanım 14. $\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, , ...\}$ *kümesine tam sayılar kümesi, bu kümenin elemanlarına tam sayılar denir.*

Tanım 15. $\mathbb{Q} = \left\{ \dfrac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$ *kümesine rasyonel sayılar kümesi, bu kümenin elemanlarına rasyonel sayılar denir.*

Tanım 16. *Rasyonel olmayan sayılara, irrasyonel sayılar denir. Rasyonel ve irrasyonel sayıların hepsine birden reel sayılar kümesi denir,* $\mathbb{R}$ *ile gösterilir.*

Bu kümeler arasında

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

bağıntısı mevcuttur.

Tanım 17. *a sayısı $E \subset \mathbb{R}$ kümesinin en küçük elemanıdır* $\iff$ *$a \in E$ ve $\forall x \in E$ için $a \leq x$ dir.*

Postulat 1. $\mathbb{N}$ *doğal sayılar kümesinin boş olmayan her alt kümesinin bir en küçük elemanı vardır.*

$\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ kümeleri için yukarıdaki özellik mevcut değildir.

Teorem 1.2. $P(n), n \in \mathbb{N}$ olmak üzere, bir önerme olsun. Bu önerme için

1. $P(1)$ doğru
2. bir $k \in \mathbb{N}$ için $P(k)$ doğru olduğundan $P(k+1)$ doğru ise

$P(n)$ önermesi her $n \in \mathbb{N}$ iç doğrudur.

Tanım 18. *Matematikte en çok kullanılan sembollerden ikisi* Σ *ve* Π *dir. Bunlar*

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$
$$\prod_{k=1}^{n} a_k = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n$$

şeklinde tanımlanırlar.

Tanım 19. $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *üzerinde tanımlanan* $<$ *bağıntısının aşağıdaki özellikleri sağladığını hatırlayalım:*

1. ***Üç durum özelliği:*** *$\mathbb{R}$ de a ve b elemanları verildiğinde $a < b, a > b$ veya $a = b$ bağıntılarından sadece biri sağlanır.*
2. ***Geçişme özelliği:*** *$a < b$ ve $b < c \Rightarrow a < c$ dir.*
3. ***Toplama özelliği:*** *$a < b$ ve $c \in \mathbb{R} \Rightarrow a + c < b + c$ dir.*
4. ***Çarplabilme özelliği:*** *$a < b$ ve $c > 0 \Rightarrow ac < bc$ dir. $a < b$ ve $c < 0 \Rightarrow ac > bc$ dir.*

Tanım 20. *a ve b iki reel sayı ve $a < b$ olsun.*

$$\{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$$

şeklinde tanımlanan reel sayı kümesine a ve b sayları ile belirtilen açık aralık denir ve (a, b) biçiminde gösterilir. Benzer olarak

$$\{x \in \mathbb{R} \quad a \leq x \leq b\}$$

kümesine kapalı aralık adı verilir ve $[a, b]$ ile gösterilir. $(a, b] = \{x \in \mathbb{R}, \quad a < x \leq b\}$ $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \quad a \leq x < b\}$ kümelerine de yarı-açık aralıklar adı verilir.

Tanım 21. *A bir lineer nokta kümesi olsun, Eğer A kümesinin her x elemanı için $x \geq a$ bağıntısını sağlayan bir a sayısı varsa A kümesine altlan sınırlıdır denir, a sayısına da A kumesinin bir alt sınırı adı verilir. Benzer olarak, eğer A nın her x elemanı için $x \leq b$ olacak sekilde bir b reel sayısı varsa A kümesine üstten sınırlı bir küme ve b sayısına da A kümesinin bir üst sınırı adı verilir. Alttan ve üstten sınırlı kümelere kisaca sınırlı kümeler denir.*

Aksiyom 1. *Üstten sınırlı bir kümenin üst sınırları içinde bir en küçüğü, alttan sınırlı bir kümenin alt sınırları içinde bir en büyüğü vardır.*

Tanım 22. *A, reel sayılar kümesinin üstten sınırlı bir alt kümesi olsun, a kümesinin üst sınılarının en küçüğüne A kümesinin en küçük üst sınırı veya supremumu denir ve $\sup A$ ile gösterilir. A kümesinin alt sınırlarının en büyüğüne A nin en büyük alt sınırı veya infimumu denir, $\inf A$ ile gösterilir.*

Tanım 23. *Eğer bir A kümesinin en küçük üst sınırı bu kümenin bir elemanı ise bu elemana kümenin en büyük elemanı veya maksimum elemanı denir, $\max A$ ile gösterilir. Benzer olarak, eğer kümenin en büyük alt sınırı kümenin bir elemanı ise bu elemana A kümesinin en küçük elemanı veya minimum elemanı denir, $\min A$ ile gösterilir.*

Teorem 1.3. A herhangi bir lineer nokta kümesi olsun. $\inf A = a$, $\sup A = b$ diyelim, a ve b sayılarının şu özellikleri vardır.

1. Her $x \in A$ icin $x \geq a$ dır.
2. Her $\delta > 0$ için
$$x < a + \delta$$
olacak şekilde en az bir $x \in A$ vardır.
3. Her $x \in A$ için $x \leq b$ dir.
4. Her $\delta > 0$ için
$$x > b - \delta$$
olacak şekilde en az bir $x \in A$ vardır.

Aksiyom 2 (Tamlık aksiyomu)**.** *$E, \mathbb{R}$ nin üstten sınırlı bir alt kümesi ise E bir sonlu supremuma sahiptir.*

Tanım 24. *Bir a reel sayısının mutlak değeri*

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $|a|$ *sayısıdır.*

Teorem 1.4. $x \in \mathbb{R}$ ve $a \geq 0$ olsun.

$$|x| \leq a \iff -a \leq x \leq a$$

dır.

Teorem 1.5. Her $a \in \mathbb{R}$ için $-|a| \leq a \leq |a|$ dır.

Teorem 1.6 (Üçgen eşitsizliği)**.** Her $a, b \in \mathbf{R}$ için

$$||\mathrm{a}| - |\mathrm{b}|| \leq |\mathrm{a} + \mathrm{b}| \leq |\mathrm{a}| + |\mathrm{b}|$$

dir.

Teorem 1.7. $x, y, a \in \mathbb{R}$ olsun.

1. $\forall \varepsilon > 0$ için $x < y + \varepsilon$ ise $x \leq y$ dir.
2. $\forall \varepsilon > 0$ icin $x > y - \varepsilon$ ise $x \geq y$ dir.
3. $\forall \varepsilon > 0$ için $|\mathrm{a}| < \varepsilon$ ise $a = 0$ dir.

Tanım 25. δ *bir pozitif sayı olsun.*

$$K = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \delta\}$$

δ*-komşuluğu adı verilir.*

Tanım 26. *Yığılma noktası...*

1.1 Sorular

1. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ olduğunu gösteriniz.
2. $A \cup (A \cap B) = A \cap (A \cup B) = A$ olduğunu gösteriniz.
3. a. $(A^c)^c = A$
   b. $E^c = \emptyset$
   c. $\emptyset^c = E$

   olduğunu gösteriniz.
4. $A \times (B \backslash C) = (A \times B) \backslash (A \times C)$ olduğunu gösteriniz.

5. $A^c \backslash B^c = B \backslash A$ olduğunu gösteriniz.

6. $A \backslash B \subset (A \backslash C) \cup (C \backslash B)$ olduğunu gösteriniz.

7. $A \cap B = \emptyset$ ise, $(A \cup B) \cap (A^c \cup B^c) = A \cup B$ olduğunu gösteriniz.

8. $A \triangle B = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$ olduğunu gösteriniz.

9. $(A \backslash B) \cap C = (A \cap C) \backslash (B \cap C)$ olduğunu gösteriniz.

10. $(A \cup B) \backslash C \subset A \cup (B \backslash C)$ olduğunu gösteriniz.

11. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ olduğunu gösteriniz.

12. $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ifadesini ispatlayınız.

13. $n \geq 4$ için $n! > 2^n$ ifadesini ispatlayınız.

14. n elemanlı bir kümenin 2^n tane alt kümesi vardır. Önermesini ispatlayınız.

15. $n \geq 2$ ve $x > -1$ sayıları için

$$1 + nx \leq (1+x)^n$$

olduğunu gösteriniz.

16. Aşağıdaki $X \subset \mathbb{R}$ alt kümeleri için, eğer varsa, $\sup X$ ve $\inf X$ sayılarını bulunuz.

    a. $X = \left\{ \dfrac{n+1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$,

    b. $X = \left\{ \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{m} : n, m \in \mathbb{N} \right\}$,

    c. $X = \left\{ \dfrac{1}{3} \mp \dfrac{n}{3n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}$.

17. $\emptyset \neq X \subset \mathbb{R}$ ve $\emptyset \neq Y \subset \mathbb{R}$ sınırlı kümeleri için

    a. $\sup(X \cup Y) = \max(\sup X, \sup Y)$

    b. $\inf(X \cup Y) = \min(\inf X, \inf Y)$

önermelerinin sağlandığını gösteriniz.